

**Федеральный научно-производственный центр,
федеральное государственное унитарное предприятие
Ростовский-на-Дону научно-исследовательский институт радиосвязи**

На правах рукописи

Желтко Александр Чеславович

**РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЙ ОСАДОК,
СМЕЩЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ ЭЛЕМЕНТОВ АВТОМОБИЛЬНЫХ
МОСТОВ**

Специальность 25.00.32 – Геодезия

Диссертация на соискание учёной степени кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук,
профессор Ю.И. Маркузе

Ростов-на-Дону - 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
 ГЛАВА 1 МОНИТОРИНГ АВТОМОБИЛЬНЫХ МОСТОВ.....	 10
1.1 Общие принципы определения осадок, смещений, деформаций.....	10
1.2 Обзор литературы по наблюдениям автомобильных мостов.....	15
1.3 Организация и методика наблюдений автомобильных мостов в Краснодарском крае.....	20
1.4 Выводы по главе 1.....	24
 ГЛАВА 2 АНАЛИЗ МЕТОДОВ СЪЁМКИ ЭЛЕМЕНТОВ АВТОМО- БИЛЬНЫХ МОСТОВ.....	 26
2.1 Оптимизация методики определения координат марок с двух кон- цов базиса.....	26
2.2 Анализ методов определения координат станции.....	31
2.2.1 Линейно-угловая засечка по двум опорным пунктам.....	31
2.2.2 Задача Ганзена.....	41
2.2.3 Определение координат двух станций без взаимных наблю- дений и опорных пунктов.....	45
2.3 Анализ методов определения координат марок с двух станций.....	48
2.3.1 Измерения марок с двух концов базиса.....	48
2.3.2 Измерения марок с двух точек без наблюдений между ними....	51
2.3.3 Измерения марок с двух точек с дополнительными измере- ниями расстояний.....	53
2.4 Измерения прогибов балок мостов.....	55
2.5 Съёмка нижнего пояса балок моста.....	60
2.5.1 Обработка измерений итерациями.....	63
2.5.2 Обработка измерений по формулам пространственной геомет- рии.....	67

2.6 Выводы по главе 2.....	72
Глава 3 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДОВ И ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ	75
3.1 Угловые засечки по двум опорным пунктам.....	75
3.2 Совместное определение координат двух точек по двум опорным пунктам.....	85
3.3 Анализ точности определения координат марок.....	91
3.4 Моделирование задачи определения прогибов и изгибов балок.....	99
3.5 Обработка измерений съёмки нижнего пояса балок по формулам пространственной геометрии.....	101
3.6 Выводы по главе 3.....	102
ГЛАВА 4 АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ.....	104
4.1 Обработка измерений по определению координат марок.....	104
4.2 Результаты определений прогибов балок.....	111
4.3 Результаты съёмки нижнего пояса балок моста.....	113
4.4 Анализ вертикальных смещений опор моста в зависимости от уров- ня воды в реке.....	116
4.5 Выводы по главе 4.....	121
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	123
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	126

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы диссертации. Известно, что предупредить катастрофу легче, чем бороться с её последствиями. Вместе с тем имеется немало примеров обрушения автомобильных мостов, которые можно было бы предотвратить.

В Краснодарском крае более 1000 автомобильных мостов, которые находятся на балансе властей разных уровней. Это мосты федеральные, региональные, муниципальные, ведомственные, специальные. Практически ежегодно, особенно в период паводков, имеют место случаи разрушения мостов, в том числе и с человеческими жертвами. Опасны малозаметные деформации элементов автомобильных мостов, осадки опор, прогибы балок и др., которые могут привести к разрушению мостов. Риск таких катастроф увеличивается для мостов, находящихся в длительной эксплуатации, и мостов через бурные горные и предгорные реки.

Количество катастроф можно уменьшить, организовав периодические наблюдения деформаций мостов. Точные геодезические измерения могут выявить возможные деформации элементов моста на том этапе, когда деформации ещё не видны при его осмотре. Это позволит своевременно принять соответствующие меры и предотвратить возможные техногенные катастрофы.

Затраты на восстановление разрушенного моста могут составлять многие сотни тысяч рублей. А затраты на наблюдения деформаций мостов и укрепление выявленных неустойчивых его элементов во много раз меньше. Поэтому экономически выгодно проводить периодические наблюдения деформаций мостов. В этой связи, начиная с 2004 года, в Краснодарском крае были начаты инструментальные наблюдения деформаций некоторых автомобильных мостов, которые иногда подвергаются повышенному воздействию водного потока в определённые периоды года.

Измерения основаны на определении координат закреплённых на элементах моста марках и нахождении разностей координат, полученных в разное

время. В этих разностях содержатся и погрешности измерений. Поэтому нередко проблемой является выделение из полученных разностей собственно смещений и случайных погрешностей измерений. Чем точнее выполнены измерения, тем меньшие по величине смещения могут быть определены, тем раньше они могут быть выявлены, и тем раньше можно принять соответствующие меры. Поэтому измерения стремятся выполнять максимально точно.

В диссертации под словом "деформации", если нет уточняющих формулировок, будем понимать смещения деталей сооружения по одной, двум или 3-м осям, в том числе и смещение сооружения в целом без трещин и разрывов. Под словом "мосты" подразумеваются только автомобильные мосты.

Различных методик выполнения работ по определению деформаций имеется немало [8], [97]. Особенности работ на мостах является недоступность большинства его деталей, неизменность положения которых нужно определять.

Кроме наблюдений деформаций мостов через заданные интервалы времени, что делают, в основном, для потенциально опасных в смысле разрушений мостов, гораздо реже, но уже для всех мостов, выполняют диагностику и паспортизацию, при которых составляют продольный и поперечный профили проезжей части моста, и иногда определяют прогибы доступных балок моста [41]. Более информативным было бы определение профилей не по проезжей части, а по нижнему поясу балок моста, однако недоступность балок является препятствием для таких определений.

Цель работы. Исследование и разработка методов повышения точности определений деформаций элементов мостов.

Идея работы. Исследование и разработка методов определения деформаций элементов мостов, которые частично или полностью позволяют решить основные проблемы, связанные с особенностями мониторинга мостов. Кроме многих других особенностей мониторинга мостов можно выделить 3 основных:

1. Недоступность большинства его деталей, неизменность положения которых нужно определять. На многих деталях моста невозможно установить нивелирную рейку или веху с призмой, как это делают в других случаях при измерениях.

2. В районе моста трудно выбрать стабильное место для опорных пунктов: близкие к мосту пункты нестабильны, удалённые от моста пункты дают дополнительную погрешность.

3. Существенные погрешности, а в ряде случаев и невозможность измерения расстояний тахеометром в безотражательном режиме при острых углах между линией визирования и плоскостью наблюдений.

Основные задачи исследования:

1. Анализ состояния вопросов геодезического определения деформаций мостов и обоснование выбора направлений исследования.

2. Разработка методики определения деформаций элементов мостов и проведение экспериментальных исследований по верификации разработанных алгоритмов, компьютерных программ и оценке точности данной методики.

3. Разработка и исследование методов определения прогибов и изгибов недоступных балок мостов без закрепления опорных и наблюдаемых точек и без измерения расстояний.

4. Разработка и исследование методики исполнительной съёмки нижнего пояса балок моста путём измерения горизонтальных углов и углов наклона на произвольные и незакрепленные точки балок с двух станций.

5. Математическое моделирование разработанных методов, апробация на реальных материалах геодезических съёмок и обоснование возможности использования их на практике.

Методы исследований: анализ, обоснование, математическое моделирование, эксперимент, примеры решения задач и выводы. Широко используются такие прикладные программы ЭВМ как электронные таблицы Ms Excel и Mathcad.

Научная новизна работы:

1. Разработана и испытана новая методика определения деформаций с учетом специфики геодезических работ на мостах, позволяющая повысить точность геодезических определений за счет исключения исходных пунктов из схемы наблюдений и отсутствия необходимости закрепления станций наблюдений на местности.

2. Разработаны и испытаны два метода решения задачи определения прогибов и изгибов недоступных балок моста.

3. Разработан алгоритм и составлены компьютерные программы оценки точности предлагаемых методик измерений на основе методики численного дифференцирования, снимающие проблему нахождения аналитически большого количества частных производных функции неизвестных по измеренным аргументам.

4. Разработана и испытана методика исполнительной съёмки линии нижнего пояса недоступных балок моста с возможностью построения двух продольных профилей линии: в горизонтальной и вертикальной плоскостях.

5. Выявлены, по наблюдениям 25 мостов в Краснодарском крае упругие вертикальные колебания опор моста при изменении уровня воды в реке. Методика измерений на мостах, описанная в диссертации, оказалась достаточно точной для установления зависимости изменения высот марок от уровня воды в реке.

Положения, выносимые на защиту:

1. Использование в очередном цикле деформационных измерений двух осадочных марок вместо отдельно выбранных и закреплённых опорных точек (реперов) позволяет исключить основные погрешности, приводящие к значительной потере точности: погрешности центрирования, редукции визирной цели, погрешности измерения высоты прибора и высоты визирования.

2. По результатам измерений только углов, вертикальных и горизонтальных, с одной или двух станций, решается задача определения непрямолинейности недоступных балок моста в одной или двух плоскостях.

3. Нахождение частных производных функций координат по измеренным вертикальным и горизонтальным углам сразу в численном виде, с последующим нахождением матрицы производных от всех неизвестных по всем измерениям и средних квадратических погрешностей всех неизвестных, снимает проблему нахождения большого количества частных производных в общем виде.

4. Исполнительная съёмка линии нижнего пояса недоступных балок моста, с возможностью построения продольных профилей линии по результатам измерений только углов - горизонтальных и вертикальных, позволяет снять проблему труднодоступности балок моста и исключить погрешности измерения расстояний безотражательным способом при острых углах визирования.

5. Опоры моста испытывают вертикальные перемещения в зависимости от уровня воды в реке, по результатам измерений на 25 мостах установлено, что при повышении уровня воды в реке на 1 метр опоры опускаются в среднем на 1,5 мм.

Практическая значимость работы вытекает из актуальности проблемы и заключается в возможности использования результатов исследований на производстве.

Достоверность и обоснованность научных положений и рекомендаций обеспечивались корректной постановкой исследовательских задач, тщательным планированием эксперимента, использованием соответствующего целям и задачам исследования математического аппарата, применением аттестованных измерительных средств, апробированных методик измерения и обработки данных, оценкой точности измерений. Также достоверность полученных результатов подтверждается использованием методов математиче-

ского моделирования и практическим применением при наблюдениях за деформациями 40 автомобильных мостов в Краснодарском крае.

Апробация работы. Основные положения работы докладывались и обсуждались на конференциях в Ростовском государственном строительном университете в апреле 2011 года и в Московском государственном университете геодезии и картографии (МИИГАиК) в апреле 2012 года, на заседаниях кафедры геодезии МИИГАиК в мае 2014 года и кафедры инженерной геодезии Горного университета в октябре 2014 года.

Личный вклад автора заключается в выборе темы работы, цели, задач исследования, поиске и анализе информации необходимой для проведения исследований. Результатом самостоятельного исследования соискателя являются разработанные и исследованные методы, теоретические и практические рекомендации, выявленные зависимости.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 8 статей, из них 5 статей в изданиях, включенных в перечень ВАК.

Объем и структура работы. Диссертационная работа изложена на 135 страницах машинописного текста, содержит 4 главы, введение и заключение, список литературы из 98 наименований, 48 рисунков, 7 таблиц, 110 формул.

В первой главе освещено состояние и развитие вопроса, обоснована необходимость проведения исследования по теме диссертации.

Во второй главе выполнены теоретические исследования предлагаемых методов определений.

В третьей главе выполнена оценка точности и математическое моделирование.

В четвертой главе приведен анализ выполненных измерений и их обработки.

Составлено несколько компьютерных программ для решения упомянутых в работе задач.

Глава 1 МОНИТОРИНГ АВТОМОБИЛЬНЫХ МОСТОВ

1.1. Общие принципы определения осадок, смещений, деформаций

Строительство различных сооружений сопровождаются иногда наблюдениями за осадками, горизонтальными смещениями и деформациями [4]. Нередко и после окончания строительства организуют наблюдения сооружения с целью определения его стабильности, неизменности в пространстве положения деталей и всего сооружения в целом. Основным методом наблюдений является производство измерений через определённые интервалы времени. В каждом цикле выполняют однотипные измерения с тем, чтобы наиболее просто и достаточно точно выявить изменения результатов между циклами.

Наблюдения за деформациями нередко проводятся с начала строительства сооружения и в первые годы его эксплуатации до достижения стабилизации [22]. В этом случае наблюдения начинают с изучения упругой отдачи дна котлована под фундамент.

Наиболее часто выполняют определение осадок - смещений в вертикальной плоскости. Быстро протекающие осадки называют иногда просадками. Всегда делают прогнозирование осадок [25]. Математическое моделирование позволяет улучшить прогноз осадок [40]. В подавляющем большинстве случаев осадки со временем затухают [72], [88]. Более информативными являются определения пространственных смещений, когда кроме осадок определяют ещё и горизонтальные смещения. Последние определяют как по одной, так и по обоим горизонтальным осям.

Неравномерные осадки или горизонтальные смещения приводят к деформациям сооружения - изменению его формы [17]. При деформациях могут возникнуть трещины и разрывы.

Для высоких сооружений актуальным является определение кренов и кручений. Их определяют по наблюдениям за горизонтальным перемещением марок, установленных в верхних и нижних частях сооружений.

Для наблюдений создают две группы точек. К первой группе относятся опорные пункты, выбираемые в заведомо стабильных местах. Ко второй группе относятся точки – марки, закреплённые на наблюдаемом сооружении.

При определении осадок применяют различные методы нивелирования: геометрическое, тригонометрическое, гидростатическое, фотограмметрическое, микро nivelирование и др.

Наиболее употребительным для определения осадок является геометрическое нивелирование. Его выполняют по программе нивелирования I и II классов высокоточными нивелирами, например Н-05 или Ni-002. Прокладывают нивелирные ходы в прямом и обратном направлениях. Измерения на станции выполняют при двух горизонтах прибора. В отдельных случаях применяют менее точные приборы и классы нивелирования (III, IV классы, техническое нивелирование) [27]. Совершенствуют методы измерений [48]. Когда осадочных марок много, невозможно их все включить в нивелирные ходы. Часть осадочных марок наблюдаются со станций как промежуточные точки [33]. В результате нарушается основное достоинство метода нивелирования из середины. Решением проблемы может быть метод геометрического нивелирования осадочных марок с нескольких станций, описанный в [34]. Последние выбираются из условия максимального числа видимых со станции марок.

Тригонометрическое нивелирование применяют в случаях, когда осадочные марки или располагаются на значительных превышениях относительно опорных точек – реперов, или являются недоступными. Основная ошибка в тригонометрическом нивелировании – ошибка за вертикальную рефракцию, коэффициент которой может непрерывно изменяться в процессе измерений. Поправка за вертикальную рефракцию пропорциональна квадрату расстояния, поэтому измерения стремятся выполнять короткими лучами (до 100 м).

Гидростатическое нивелирование, основанное на уравнивании жидкости в сообщающихся сосудах, применяют в случае стеснённых условий измерений. В настоящее время создано немало приборов для гидростатического ни-

велирования, обеспечивающих точность до 0,05 - 0,1 мм. Наиболее предпочтительны стационарные гидростатические системы, установленные по периметру исследуемого объекта.

На прецизионных сооружениях применяют метод микроnivelирования с базой прибора 1 - 2 м.

В фотограмметрическом методе исследуемый объект фотографируют фототеодолитами или другими измерительными камерами с одной и той же точки в разных циклах измерений [74]. В стереофотограмметрическом методе съёмку ведут с двух концов базиса. По фотоснимкам, полученным в разных циклах, на специальных стереоприборах определяют смещения точек сооружения по двум или трём осям [12]. Точность определений может достигать 1 мм.

Фотограмметрические методы успешно применяются для определения мгновенных деформаций [47] подкрановых путей, подвесных дорог или колебаний отдельных сооружений под действием динамической нагрузки. Съёмки ведут с двух концов базиса одновременно двумя фототеодолитами.

Применяют также спутниковые навигационные системы. Так на одном из построенных в 2009 году мостов через реку Енисей на опорах моста закреплены приёмники GPS, ГЛОНАСС, обеспечивающие точность определения всех трёх координат в диапазоне первых единиц миллиметров.

В диссертации [58] рассматриваются возможности использования спутниковых навигационных систем для определения смещений плотины во Вьетнаме.

Точные спутниковые геодезические измерения применяют повсеместно для создания опорных геодезических сетей, в частности для обеспечения строительства длинных мостов [89].

На примере организации геодезического деформационного мониторинга моста через реку Обь вблизи города Барнаула в работе [1] показаны преимущества непрерывного и долгосрочного деформационного мониторинга мостов с использованием спутниковых навигационных систем.

Для определения горизонтальных смещений применяют методы створных измерений, угловых засечек, триангуляции, полигонометрии [42].

Сворные измерения предусматривают определение смещений только по одной горизонтальной оси, в направлении которой на объект действует односторонняя сила. Имеется немало вариантов створных измерений. Измеряют или горизонтальные (параллактические) углы теодолитом, или отклонения от створа специальными линейками (марками) [94].

Прямой угловой засечкой с двух-трёх опорных точек определяют две плановые координаты недоступных точек, например шпиля высотного здания. В настоящее время в связи с широким использованием безотражательных тахеометров кроме прямой угловой засечки могут применяться также линейные и линейно-угловые засечки. Так в работе [86] делается вывод, что электронные тахеометры позволяют выполнять высокоточные измерения в безотражательном режиме с точностью, вполне удовлетворяющей точностным требованиям к определению деформаций колец тоннеля (2 – 5 мм).

В методе триангуляции в сеть включаются как опорные точки, так и наблюдаемые точки сооружения, если на последние можно установить теодолит. Триангуляцию иногда заменяют трилатерацией или линейно-угловой сетью. На практике нередко используют комбинации линейно угловых сетей и засечек.

В условиях отсутствия видимости (тоннели, закрытые кольцевые сооружения и др.) прокладывают полигонометрические ходы, которые повторяют по тем же точкам от цикла к циклу.

Большое число различных методов измерений применяют для наблюдений за оползнями [9]. Методы выбирают в зависимости от числа осей, по которым прогнозируют движение оползня [81]. Наблюдения ведут или по одной, или по двум горизонтальным осям, или по всем 3-м осям, или только по вертикальной оси.

Для определения крена сооружения применяют нитяные отвесы, теодолиты, приборы вертикального проецирования. Последние наиболее точны и мо-

гут обеспечить угловую точность до 1"-2". Применение теодолита (тахеометра) незаменимо для объектов с недоступными высокими точками и закрытым основанием, когда можно использовать различные линейно-угловые засечки.

В работе [68] автор для учета нестабильности главного условия нивелира при производстве работ предлагает использовать веерную схему нивелирования и метод изолированных базисов при измерениях кренов плоских элементов сооружений в условиях плотной промышленной или городской застройки, где существуют сложности с созданием опорной сети.

В простейших методах наблюдений за деформациями и трещинами делают их фотографии с приложенной перпендикулярно трещине линейкой с миллиметровыми делениями, устанавливают маяки из стекла, цементного раствора, измеряют расстояние между нарисованными по обе стороны трещины штрихами и др. Если трещина увеличивается, то это видно на фотоснимках, или маяки тоже дают трещину, или увеличивается расстояние между штрихами и т.д.

При проектировании наблюдений следует найти оптимальное решение по размещению марок на сооружении [66]. Избыток марок приводит к неоправданному увеличению объёма работ, недостаток марок может ухудшить качество мониторинга сооружения. В руководстве [73] довольно подробно указываются места размещения реперов и расстояния между ними в зависимости от типа сооружений.

Различные подходы применяют для определения интервала времени между циклами измерений [5], [62]. Обычно вначале наблюдений интервал небольшой: несколько дней, неделя, месяц. Затем интервал может увеличиваться, хотя и не всегда, по мере получения и пополнения информации о стабильности сооружения.

Работы по определению смещений и деформаций выполняются на основании технического задания [80], в котором указываются: части зданий, сооружений, за которыми следует вести наблюдения; расположение исходной

основы и марок; периодичность наблюдений; требуемая точность; перечень отчётных документов.

1.2. Обзор литературы по наблюдениям автомобильных мостов

При разработке мероприятий по наблюдениям мостов за основу была принята Инструкция [41]. В ней указывается, что нужно измерять, где и как строить поперечные профили русла реки, какие контрольно-инструментальные измерения необходимо выполнять при проведении осмотров мостов и труб на автомобильных мостах.

Немало публикаций о том, что электронными тахеометрами можно определять превышения с точностью, соизмеримой с точностью геометрического нивелирования. Так в статье [6] обосновывается и указывается, что "тригонометрическое нивелирование с использованием электронных тахеометров в некоторых случаях может конкурировать с прецизионным геометрическим нивелированием, например, при наблюдениях за осадками промышленных и гражданских сооружений". Тригонометрическое нивелирование по точности может соответствовать техническому нивелированию, если использовать метод [65], в котором используются две нивелирные рейки. При коротких лучах тригонометрического нивелирования можно получить очень высокую точность [67].

Кроме осадок и деформаций определяют для мостов ещё их динамические характеристики и сопровождающие их колебательные процессы для некоторых элементов мостов. В статье [61] рассматриваются амплитудно-частотные характеристики моста, в том числе и собственные частоты. Исследуется возможность анализа записанной информации на основе разложения в ряды Фурье.

В статье [20] авторы отмечают, что классические методы геодезических деформационных измерений являются составной частью так называемого «Structural Health Monitoring» и предназначены в основном для наблюдения

за медленно текущими деформационными процессами, для оценки которых можно использовать периодические, к примеру ежегодные или сезонные измерения. При этом вследствие постоянно возрастающих требований к контролю инженерных сооружений, а также из-за стремительного развития вычислительной техники и средств измерений, все большую роль в деформационных наблюдениях занимают частотные методы измерений с периодичностью от нескольких измерений в час до десятков измерений в секунду.

Практическая реализация концепции частотного мониторинга реализованная на автомобильном мосту в городе Ереване (Армения) описана в [71]. Авторы утверждают, что частотные методы мониторинга могут успешно применяться на мостах. Эти методы выходят за рамки геодезического контроля и успешно его дополняют.

Высокочастотные колебания строительных конструкций могут быть выделены из результатов измерений вычитанием низкочастотной составляющей сигнала. Использование спектрального анализа (разложение в ряд Фурье) позволяет построить амплитудно-частотную характеристику сигнала и выделить собственную частоту колебаний контролируемой конструкции [70].

Об определениях горизонтальных смещений, осадок, деформаций изложено в учебниках [45], [47].

В статье [10] рассматривается путь решения задачи интерпретации массива данных, полученных для множества точек сооружения и циклов измерений. Он основан на последовательном переходе от общего к частному и применяется при анализе и синтезе сложных больших систем. Система рассматривается как совокупность зависимых элементов, связанных между собой какими-либо функциональными отношениями. Выявление системного свойства – главное преимущество перед классическим способом анализа и синтеза системы, в котором системное свойство выявить невозможно. Здесь каждому циклу наблюдений для одной координаты соответствует одна точка, радиус-вектор которой, равен сумме векторов n -мерного пространства состояний. Множество точек, задаваемых радиусами-векторами для каждого

цикла, образует в фазовом пространстве фазовую траекторию, характеризующую изменение состояния системы геодезического контроля от цикла к циклу. Приводится пример анализа состояния системы по выявлению характеристик поступательного и вращательного движений сооружения по наблюдениям осадок.

В статье [82] предлагается определять крен сооружения путём измерения координат точек на разных сечениях сооружения башенного типа. Точки выбираются на специальных площадках, где устанавливаются или GPS-приёмники, или отражатели для измерений тахеометрами. По наблюдениям вычисляются разности координат Δx и Δy и по ним обе составляющие крена.

Различные полезные рекомендации при определении крена высоких сооружений изложены в статье [14]. В частности, более точно привести ось вращения тахеометра в отвесное положение после горизонтирования его по уровню при алидаде можно с помощью вертикального круга, если прибор имеет компенсатор углов наклона. Трубу направляют параллельно двум подъёмным винтам подставки и при попеременных поворотах алидады на 180° , вращая эти винты, добиваются одинаковых отсчётов по вертикальному кругу. Повернув алидаду на 90° делают то же третьим винтом. В результате одинаковые отсчёты по вертикальному кругу должны быть при любом положении алидады по азимуту.

Некоторые авторы [24] рассматривают геодезические измерения как мониторинг сооружения, который должен строиться на основе интегральной количественной геодезической информации. Сюда относится комплексность мониторинга, его структурно-функциональный анализ, репрезентативность и точность результатов наблюдений, математическая обработка и моделирование. Точность геодезического контроля за деформационными процессами необходимо рассматривать комплексно в широком информационном смысле как складывающуюся из пространственно-временной достаточности наблюдений и их необходимой измерительной точности [23].

В [84] авторы указывают, что аргументированное и исчерпывающее суждение о состоянии инженерного сооружения можно достичь только по результатам комплексных геотехнических исследований, составной частью которых является полномасштабный геодезический деформационный мониторинг. В статье описывается стратегия и тактика интерпретации результатов геодезического деформационного мониторинга.

Требованиям к геодезической информации для решения задач геодезического деформационного мониторинга мостовых сооружений посвящена статья [85]. Подробно обсуждаются критерии, которым должна отвечать эта информация: необходимость, достаточность, целостность.

В условиях, когда точность измерений близка к смещениям, рекомендуется [13] проводить совместную математическую обработку и моделирование с корректным использованием методов оптимальной фильтрации.

Когда вычисляют разности результатов между циклами, то иногда возникают вопросы, какие циклы брать для этих разностей. В [53] предлагается по мере выполнения наблюдений сооружения, выполненные циклы объединять. Применяется рекуррентное уравнивание и контроль грубых ошибок измерений в очередном цикле, который сравнивается сразу со всеми выполненными ранее циклами. Контроль грубых ошибок измерений с использованием рекуррентного алгоритма и последующее уравнивание геодезических сетей при деформационных наблюдениях инженерных сооружений показан в [2].

Слабым местом в тригонометрическом нивелировании является учёт вертикальной рефракции. Детально эти вопросы изложены в [44], [21]. В [57] предлагается способ её учёта, в котором вычисляется интегральный температурный градиент, зависящий от средней высоты луча над подстилающей поверхностью. В [64] описан метод, основанный на физической связи нивелирной рефракции с амплитудой колебания изображения штриха. В [16] дополнительно предлагается для этого метода мира с переменным периодом от 0,3 до 1,0 мм.

Большое внимание уделяется корректности при обработке результатов измерений. Применяют обработку в зависимости от применяемых способов измерений [7], [79]. Предпочтительней применять более универсальные методы, в которых одновременно выполняют обработку всех марок, опорных точек и разных циклов. Всегда полезны избыточные измерения. В этом случае обработку нередко выполняют по методу наименьших квадратов [49], [51]. Для сложных схем измерений можно применить метод решения нелинейных уравнений [55], [56] для нахождения неизвестных, если имеются быстродействующие компьютеры.

Всегда имеется серьёзная проблема расслоения в полученных результатах ошибок измерений и величин смещений [3]. Об актуальности этого вопроса свидетельствует большое число различных публикаций по повышению точности измерений [27], [59], [75] и совершенствованию методик обработки измерений [39], [63].

В некоторых случаях при обработке очередного цикла выполняют анализ устойчивости исходной основы. Различные подходы для анализа устойчивости реперов изложены в [18]. В статье [26] предлагается вычислять рейтинг реперов. В [96] выявляют наиболее устойчивый репер и реперы, которые можно считать стабильными. Остальные реперы из обработки исключаются. В [90] вычисляют средние отметки реперов в цикле и к отметкам находят поправки. В способах [19], [83] обобщаются 2 предыдущих способа. В статье [3] предлагается применять робастный метод уравнивания [87], устойчивый по отношению к грубым ошибкам. Поиск неустойчивого репера можно выполнять подобно поиску грубых ошибок. В [11] предлагается вблизи основного репера закреплять куст из трёх вспомогательных реперов, расположенных так, чтобы их превышения над основным репером измерялись с одной станции при равенстве плеч.

Минимаксное оценивание [98] выполняют при неизвестных весах измерений. В [95] делается обобщение метода, как на ошибки измерений, так и на исходные данные.

Всегда имеют место температурные деформации. В некоторых случаях их нужно учитывать. В [76] приводятся рекомендации и формулы для учёта температурных деформаций каркаса здания и возможность применения математического моделирования [60].

Проблема автоматизации измерений деформаций достаточно актуальна. В статье [46] автор дополняет и обобщает методы измерений пространственных смещений сооружений, изложенные в [91], [92], основанные на использовании механических, электронных и оптических средств и объединённых в автоматизированные системы.

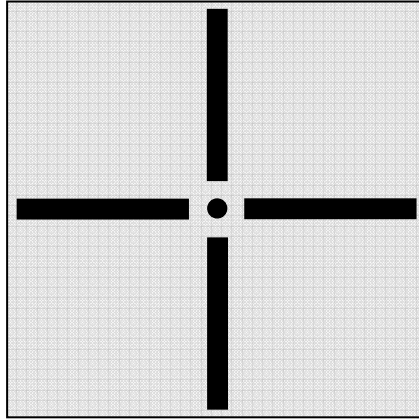
1.3. Организация и методика наблюдений автомобильных мостов в Краснодарском крае

С 2004 года в Краснодарском крае организованы наблюдения некоторых автомобильных мостов, которые иногда подвергаются предельному воздействию воды в период паводков.

Для наблюдений на деталях моста устанавливают марки, координаты которых определяют два раза в год: в мае и октябре. Координаты определяют от опорных пунктов – реперов. На мосту 2 репера, заложенные на обоих берегах реки по одну сторону от моста. Методика измерений одинакова в каждом цикле. По разностям измеренных координат марок можно судить о стабильности элементов мостов.

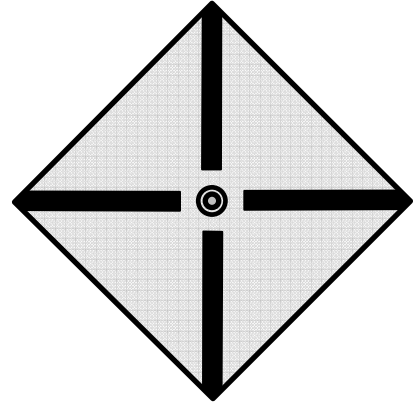
Марки наносят либо на балках моста, либо на ригелях опор моста. Марка должна быть хорошо видна на расстояниях, равных длине моста, под довольно острыми углами до 10° и обеспечивать однообразие наведения на неё с точностью до 2-3 мм. Испытана конструкция марки в виде креста красного цвета, нарисованного на белом фоне (рис.1.1). Собственно маркой является круг в середине марки диаметром 10 мм.

Применяют и другую конструкцию марки, в которой на листе оцинкованной жести толщиной 1 мм, нарисован крест (рис. 1.2). Марка крепится к тор-



Марка нарисована на балке красным цветом на белом фоне. Размер марки 23×23 см.

Рисунок 1.1 - Старая марка



Марка изготовлена на оцинкованной стальной пластине размерами 15×15 см. Закреплена на опоре одним дюбелем в середине пластины.

Рисунок 1.2 - Новая марка

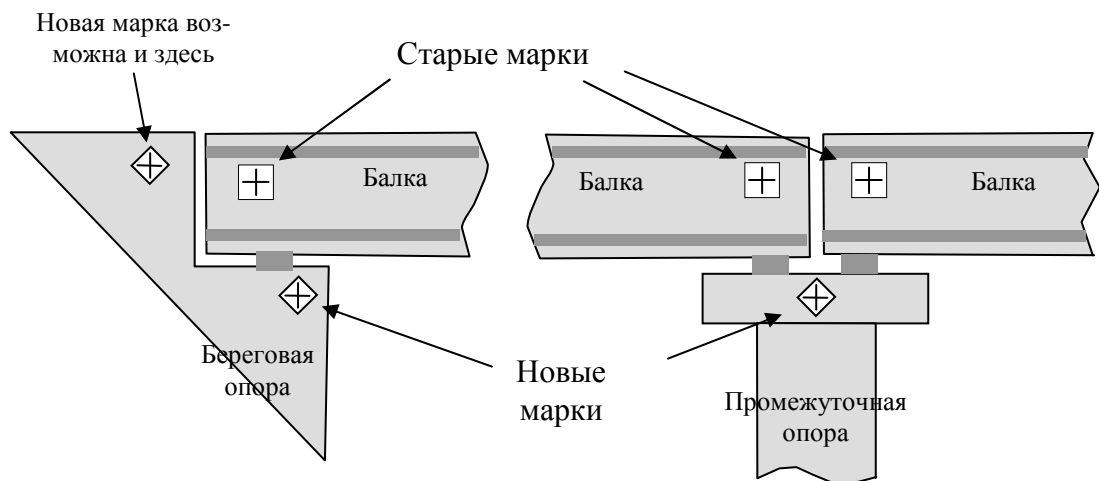


Рисунок 1.3 – Схема размещения марок

цу ригеля опоры дюбелем. Шляпка дюбеля диаметром 13 мм в середине марки является точкой для наведений.

Размещение марок на деталях моста показано на рисунке 1.3.

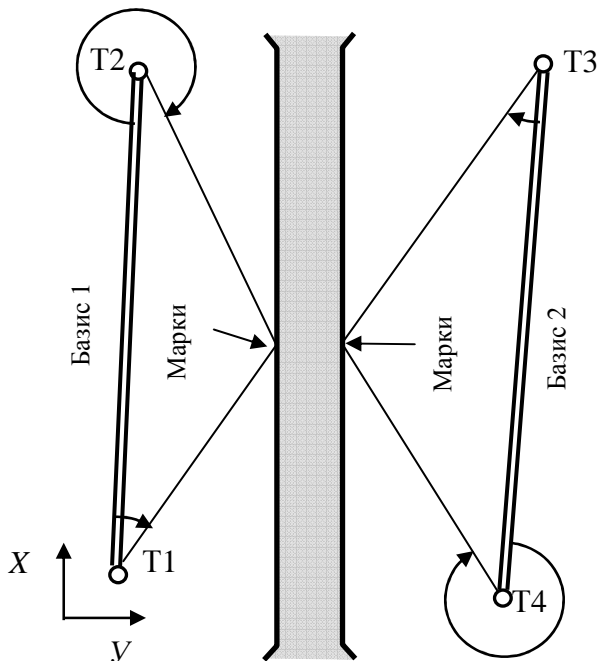
Измерения выполняют так, чтобы получить все три координаты каждой марки, потому что смещения могут быть в любом направлении. В разностях между циклами координат марок содержатся как ошибки измерений, так и возможные смещения марок. Поэтому, чтобы выявить эти смещения как можно раньше, измерения нужно выполнять как можно точнее. Поэтому точность определения координат марок имеет принципиальное значение.

Ниже рассматриваются и анализируются различные схемы измерений, и акцент поэтому делается на максимальную точность полученного результата.

Наиболее подходящими методами определения плановых координат марок является прямая угловая засечка, а для определения высот - тригонометрическое нивелирование.

Собственно измерения марок выполняют с 4-х точек: Т1...Т4 (рис. 1.4). Эти точки, как правило, нельзя было совмещать с реперами, потому что условия выбора тех и других разные. Точки Т1,...Т4, как концы базисов, выбирались из условия наилучшей геометрии засечек марок, а реперы - из условия наилучшей сохранности. Поэтому требовался ещё один этап измерений: определение координат базисов от реперов.

Обычно всегда можно было найти точку на мосту (станция А - рис. 1.5) откуда видны все 6 искомых точек. С этой станции измерялись тахеометром горизонтальные, вертикальные углы и расстояния на все точки. Расстояния измерялись на призму.



Т1-Т4 – точки стояния теодолита

Рисунок 1.4 – Схема определения координат марок на мосту

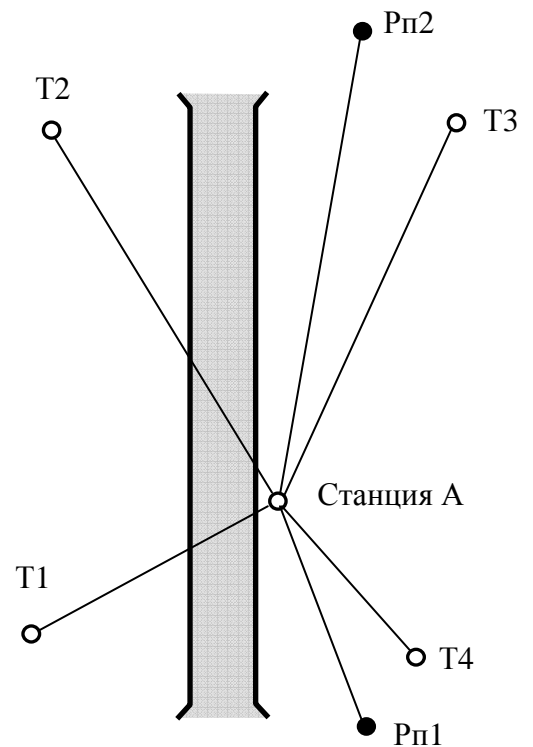


Рисунок 1.5 – Схема увязки точек тахеометром со станции А

Для контроля и повышения точности подобные измерения выполнялись и с точек Т1,...Т4 одновременно с наблюдениями марок на те реперы и концы другого базиса, которые видны с данной точки. В результате на мосту создавалась временная сеть из 6 пунктов, координаты и высоты которых требовалось получить из уравнивания всех измерений [43].

При наблюдениях моста всегда выполняют съёмку русла реки и прилегающей к мосту территории. Для этого снимают 3 профиля; по оси моста и в 25 метрах от оси моста вверх и вниз по течению. Длина 2-х последних профилей на 50 метров больше длины моста: начало профиля в 25 метрах до начала моста, конец профиля в 25 метрах за концом моста. Снимают также периметр вокруг промежуточных опор моста.

Применяют тахеометрическую съёмку не менее чем с двух станций, выбираемых по разные стороны моста.

При съёмке выполняют измерения расстояний, горизонтальных и вертикальных углов до вехи с призмой, которую перемещает речник. В глубоких местах, где невозможно установить вежу, делают промеры глубин с резиновой лодки. Лодка с мотором перемещается по нужному створу и глубины измеряются напротив каждой опоры и в середине между опорами. В первые годы наблюдений мостов створ задавался верёвкой, натягиваемой через реку и закрепляемой разными способами на обоих берегах реки.

Схема размещения марок на мосту за период наблюдений несколько раз менялась. Первоначально в 2004 году измерялось неоправданно много марок. На одной стороне моста было 2 марки на каждой опоре и 3 марки на каждой балке (в начале, середине и конце). Поэтому на мосту, например, имеющему 14 опор, измерялось 130 марок. Затем с 2005 года использовались только марки, нанесённые на опорах. В некоторых случаях измерялись и некоторые марки на балках, если были сомнения в стабильности положения опор.

Марки наносились краской на опорах и балках (рис. 1.1) и нередко нуждались в обновлении или восстановлении. С известных позиций общего

принципа определения осадок и деформаций сооружений обновление осадочных марок считается неприемлемым, а если марка наносится заново (восстанавливаются), то в этом случае наблюдения данного элемента моста прерываются на 5-7 месяцев и, кроме того, связать выполненные ранее наблюдения с будущими наблюдениями невозможно. Это существенный недостаток наблюдений моста.

Поэтому в 2007 году исполнителями наблюдений мостов были нанесены новые марки в наиболее защищённом месте в начале и конце каждой балки в верхней её части под плитой. Несколько позже заказчиком были изготовлены марки на пластинах и закреплены на ригелях опор. В результате на мостах один раз наблюдались оба комплекта марок. В дальнейшем наблюдаются только марки на опорах. Выполненные измерения марок на балках являются резервными и используются в отдельных случаях. Вместе с тем с 2010 года вновь используются для измерений марки и на опорах, и на балках.

1.3 Выводы по главе 1

Проведенный обзор существующих методов деформационных наблюдений показал, что задача совершенствования производства, обработки и оценки необходимой точности геодезических измерений для целей определения осадок, смещений и деформаций элементов автомобильных мостов является достаточно актуальной.

Деформационные наблюдения мостов имеют много особенностей, среди которых можно выделить три основных:

- недоступность большинства деталей мостов, неизменность положения которых нужно определять. На многих деталях моста невозможно установить нивелирную рейку или вежу с призмой, как это делают в других случаях при измерениях;

– в районе моста трудно выбрать стабильное место для опорных пунктов: близкие к мосту пункты нестабильны из-за паводков, удалённые от моста пункты дают дополнительную погрешность;

– существенные погрешности, а в ряде случаев и невозможность измерения расстояний тахеометром в безотражательном режиме при острых углах между линией визирования и плоскостью наблюдений.

Поэтому основной идеей работы является исследование и разработка таких методов определения деформаций элементов мостов, которые частично или полностью позволяют решить основные проблемы, связанные со спецификой геодезических работ на мостах.

Глава 2 АНАЛИЗ МЕТОДОВ СЪЁМКИ ЭЛЕМЕНТОВ АВТОМОБИЛЬНЫХ МОСТОВ

2.1 Оптимизация методики определения координат марок с двух концов базиса

Марки, закреплённые на опорах или балках моста, как правило, не доступны. Координаты их могут быть измерены разными способами, например, угловой или линейной засечкой [56] с двух концов базиса или полярным способом с одного пункта. Расстояния при этом могут быть измерены тахеометром в безотражательном режиме. Однако при измерениях расстояний могут быть проблемы.

Во-первых, мосты для наблюдений могут иметь длину до 300 метров и более и далеко не каждым тахеометром, имеющим функцию безотражательного измерения расстояний можно измерять расстояния до 300 метров без призмы.

Во-вторых, при косых измерениях на плоскость марки появляется дополнительная ошибка, вызванная несовпадением визирной оси зрительной трубы и лазерного луча. Большая часть этой ошибки исключается при измерениях при двух кругах. Однако при малом угле между визирной осью и плоскостью марки резко увеличивается ошибка измерения расстояния, вызванная неточным наведением на марку по направлению.

Так поперечная ошибка Δ_α (рис 2.1), вызванная ошибкой наведения m_α на расстоянии до марки, равном s , выражается формулой

$$\Delta_\alpha = m_\alpha \cdot s, \quad (2.1)$$

Поперечная ошибка даёт ошибку в измеренном расстоянии по формуле

$$\Delta_s = \Delta_\alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = m_\alpha \cdot s \cdot \operatorname{ctg} \alpha, \quad (2.2)$$

где α - горизонтальный угол между плоскостью марки и линией визирования.

Из (2.2) имеем, если $m_\alpha = 2'' = 10^{-5}$ рад; $s = 200$ м; $\alpha = 10^\circ$, то $\Delta_s = 12$ мм, что неожиданно много.

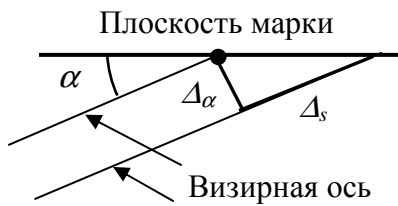


Рис. 2.1. Влияние угла α на точность измерения расстояния

При остром угле между плоскостью марки и линией визирования может иметь место ещё одна ошибка - за неодинаковую отражательную способность поверхности марки в пределах лазерного пятна. Разные участки лазерного пятна удалённые от тахеометра на разные расстояния по-разному отражают ла-

зерный луч. В зависимости от конструкции светодальномёра измеренное расстояние может относиться не к центру пятна, а к точке осреднённой яркости отражённого от марки луча, или к той части марки, ближайшей к тахеометру, которая даёт достаточный уровень отражённого сигнала.

Отсюда можно сделать вывод, что наиболее подходящим методом определения плановых координат марок является прямая угловая засечка, а для определения высот - тригонометрическое нивелирование. Угловые измерения можно дополнять измерениями расстояний, если плоскость марки перпендикулярна визирной оси.

Опыт наблюдений марок на мостах по описанной в разделе 1 методике показал, что в ней имеет место значительная потеря точности, несмотря на значительное число избыточных измерений. Основными ошибками являлись ошибки центрирования, редукции визирной цели, измерения высоты прибора и высоты визирования.

Рассматривался вопрос применения фотограмметрических методов определения смещений элементов сооружения. Однако для мостов достоинство фотограмметрических методов значительно снижается вследствие того, что далеко не всегда можно делать съёмку фототеодолитами с одних и тех же точек в разных циклах измерений. Пойма реки по-разному заполняется водой в разные периоды года, поэтому гарантированно выбрать и закрепить опорные точки для фотографирования во всех циклах не представляется возможным. Если съёмка в двух циклах выполняется с одних и тех же точек, то по снимкам можно сразу определить смещения по 2-м или 3-м осям. Если точки раз-

ные, то смещения приходится вычислять через разности вычисленных по снимкам координат, что значительно снижает точность разностей.

Лазерные сканирующие системы тоже могли бы использоваться для целей измерения смещений элементов моста. Но эти приборы предназначены несколько для другой цели. Они по существу реализуют тахеометрическую съёмку в безотражательном режиме с фантастической скоростью. В результате за считанные минуты времени имеем многие миллионы точек. Для мониторинга моста не нужно это огромное облако точек. Кроме того, и здесь для мостов достоинство этих приборов заметно снижается вследствие измерения расстояний до точек, что, как показано выше, снижает точность конечного результата: лучше использовать измерения только углов. В описанной ниже методике измерений используются электронные тахеометры, но расстояния ими не измеряются, так как они нередко только портят результат.

Тем не менее, применяемая ранее программа измерений была изменена и наблюдения за деформациями мостов сводилось только к наблюдениям марок с двух концов базиса. Реперы не использовались.

В разработке новой методики наблюдений и их обработки активное участие принимал автор диссертации.

Наблюдения марок выполнялись с двух концов базиса, длина которого близка или несколько меньше длины моста. Концы базиса удалены от моста приблизительно на половину длины моста. На каждом мосту 2 базиса, по одному с каждой стороны моста.

Наблюдения марок выполнялись двумя электронными тахеометрами, которые устанавливались на обоих концах каждого базиса. Визирование по линии базиса выполнялось одновременно двумя исполнителями способом "труба в трубу". Это позволило практически исключить ошибки центрирования тахеометра над точкой и редукции визирной цели. При визировании "труба в трубу" можно не закреплять на местности точку стояния тахеометра и нет необходимости измерять высоту прибора. Последние две операции ино-

гда выполнялись, если предполагалось, что закреплённая точка сохранится до следующего цикла.

Наведения на марки и зрительную трубу тахеометра, установленного на другом конце базиса, выполняют перекрестием сетки нитей. Отсчёты по горизонтальному и вертикальному кругам записывают в запоминающее устройство прибора. Наблюдения выполняют двумя полуприёмами при двух положениях тахеометра: круг "лево" и круг "право".

Для обработки измерений применяют условную левую систему координат, в которой ось X горизонтальна и направлена по оси моста в сторону увеличения нумерации опор, ось Y – горизонтальна, перпендикулярна оси X и направлена вправо, ось Z направлена вверх.

Вычисления выполняют в такой последовательности. Первоначально координаты одного из концов базиса берут произвольно, а координаты другого конца вычисляют по приближённо принятому расстоянию, дирекционному углу и измеренным зенитным расстояниям. По этим координатам, измеренным горизонтальным углам от линии базиса до каждой марки, и измеренным зенитным расстояниям вычисляют все три координаты каждой марки.

Произвольно взятую систему координат совмещают затем с системой координат предыдущего цикла путём её параллельного переноса, вращения и масштабирования таким образом, чтобы вычисленные координаты X и Y максимально удалённых друг от друга двух марок на одной стороне моста (опорные марки) не стали равными координатам этих же марок в предыдущем цикле. По высоте Z приравнивались между циклами не сами высоты, а средние из двух высот опорных марок. На другой стороне моста выполнялось такое же преобразование координат.

При этом, хотя на обеих сторонах моста системы координат независимы между собой и по существу разные, они совпадают между собой с ошибкой не более 1 см. Это имеет значение для тахеометрической съёмки профилей и периметров опор моста, когда координаты точки стояния тахеометра опреде-

ляют по наблюдениям марок с одной стороны моста, а часть точек с этой станции снимают на другой стороне моста.

По разностям координат в двух циклах для остальных марок можно делать выводы о взаимных смещениях элементов моста. Дополнительным признаком возможных смещений является подтверждение разностей координат для другой марки, находящейся на данной опоре, но с другой стороны моста.

Таким образом, приведенная схема измерений и их обработки сводится к следующему. По двум крайним маркам определяют координаты одного и другого конца базиса. Одновременно используют измерения и по линии базиса. Затем по этим координатам и угловым измерениям на марки вычисляют координаты марок.

Исключение опорных пунктов (реперов) из схемы измерений вызвано ещё следующими обстоятельствами.

Во-первых, не всегда удаётся выбрать реперы в непосредственной близости к мосту и в то же время в достаточно надёжном и стабильном месте. Невольно возникает предложение считать наиболее надёжными точками в районе моста - точки на береговых опорах.

Во-вторых, при работе одновременно двумя приборами практически невозможно выбрать два репера так, чтобы они были видны со всех 4-х концов двух базисов. Если нет хотя бы одной видимости, схема привязки усложняется. Нужно закреплять станции на местности, в результате теряются достоинства работы двумя приборами.

В этой схеме крайние марки считаются опорными условно. Координаты их неизменны. Однако если эти марки получают смещения, то изменятся координаты остальных марок. Несложный анализ разностей координат марок между циклами позволяет в большинстве случаев без труда выявить нестабильные марки независимо от того, являются они опорными или определяемыми.

Если на мосту только 4 опоры и менее, то опорных марок становится столько же или больше, чем определяемых марок. В этом случае рекомендуется сделать дополнительные марки. На всех наблюдаемых мостах, где име-

ется только 4 опоры, удалось выбрать дополнительные марки на береговых опорах: в середине вертикальной стенки, обращённой к реке. Эти марки должны быть видны со всех 4-х концов обоих базисов. Такое решение следует признать довольно удачным, потому что две эти марки являются опорными для обеих сторон моста и в результате все 8 марок на опорах являются определяемыми. Кроме того, эти 2 дополнительные марки позволяют без труда создать на мосту одну систему координат, а не две, хотя и близкие между собой, как в других случаях.

Таким образом, в доработанной методике измерений марок реперы не используются, измерения выполняются одновременно двумя приборами и станции наблюдений на местности не закрепляются.

2.2 Анализ методов определения координат станции

В любой задаче определения координат есть немало различных вариантов её решения. Особенностью определений для автомобильных мостов является невозможность установки прибора на определяемых точках и опорных пунктах, если последние закреплены на вертикальных стенках деталей моста. Поэтому измерения можно делать только на вспомогательных точках – станциях наблюдений. Координаты станций всегда нужно определять, хотя они являются вспомогательными величинами.

Количество станций должно быть минимальным и лучшим вариантом является наблюдения с одной-двух станций, когда одновременно выполняют измерения как для определения координат станций, так и на искомые элементы моста. По этим данным затем находят искомые величины: координаты закреплённых на мосту марок, прогибы и изгибы балок, горизонтальный и вертикальный профиль нижней линии балок. Поэтому в данной задаче два этапа. Рассмотрим 1 этап - методы определения координат станций.

2.2.1 Линейно-угловая засечка по двум опорным пунктам

Эта общая задача рассматриваются в контексте с вопросом определения координат станции по двум опорным маркам на мосту.

Если измерить горизонтальные и вертикальные углы с точки Р на два опорных пункта А и В (рис. 2.2), то по трём измеренным углам однозначно вычисляются три координаты точки Р [36]. Для вычислений можно использовать формулу для горизонтального расстояния $d_1=РА$, выводимую из решения двух квадратных уравнений

$$d_1 = \frac{-h \cdot \operatorname{tg} v_1 + h \cdot \operatorname{tg} v_2 \cdot \cos \beta}{\operatorname{tg}^2 v_1 + \operatorname{tg}^2 v_2 - 2 \cdot \operatorname{tg} v_1 \cdot \operatorname{tg} v_2 \cdot \cos \beta} \pm \frac{\operatorname{tg} v_2 \sqrt{b^2 (\operatorname{tg}^2 v_1 + \operatorname{tg}^2 v_2 - 2 \cdot \operatorname{tg} v_1 \cdot \operatorname{tg} v_2 \cdot \cos \beta) - h^2 \cdot \sin^2 \beta}}{\operatorname{tg}^2 v_1 + \operatorname{tg}^2 v_2 - 2 \cdot \operatorname{tg} v_1 \cdot \operatorname{tg} v_2 \cdot \cos \beta}, \quad (2.3)$$

где h – превышение пункта В над пунктом А ($h = H_B - H_A$); v_1 и v_2 – измеренные углы наклона; β – измеренный горизонтальный угол; b – расстояние между пунктами А и В.

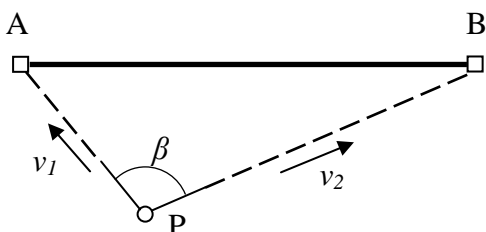


Рис. 2.2. Схема пространственной обратной угловой засечки

Анализ формулы показывает, что для небольших углов наклона знаменатель формулы близок к нулю, поэтому расстояние d_1 , а отсюда и координаты точки Р вычисляются с пониженной точностью.

Однако любопытно, что это относится только к двум плановым координатам. Высота определяемой точки вычисляется достаточно точно независимо от величин углов наклона и эта точность соизмерима с точностью тригонометрического нивелирования. Покажем это.

Для превышения А над Р напомним

$$h_1 = d_1 \cdot \operatorname{tg} v_1 = \frac{-h \cdot \operatorname{tg}^2 v_1 + h \cdot \operatorname{tg} v_1 \cdot \operatorname{tg} v_2 \cdot \cos \beta}{\operatorname{tg}^2 v_1 + \operatorname{tg}^2 v_2 - 2 \cdot \operatorname{tg} v_1 \cdot \operatorname{tg} v_2 \cdot \cos \beta} \pm \frac{\operatorname{tg} v_1 \cdot \operatorname{tg} v_2 \sqrt{b^2 (\operatorname{tg}^2 v_1 + \operatorname{tg}^2 v_2 - 2 \cdot \operatorname{tg} v_1 \cdot \operatorname{tg} v_2 \cdot \cos \beta) - h^2 \cdot \sin^2 \beta}}{\operatorname{tg}^2 v_1 + \operatorname{tg}^2 v_2 - 2 \cdot \operatorname{tg} v_1 \cdot \operatorname{tg} v_2 \cdot \cos \beta}. \quad (2.4)$$

Разделив числитель и знаменатель (2.4) на $tg^2 v_2$, и сделав замену,

$$k = \frac{tg v_1}{tg v_2}, \quad (2.5)$$

будем иметь

$$h_1 = d_1 \cdot tg v_1 = \frac{-h \cdot k^2 + h \cdot k \cdot \cos \beta}{k^2 - 2 \cdot k \cdot \cos \beta + 1} \pm \frac{k \cdot \sqrt{b^2 (tg^2 v_1 + tg^2 v_2 - 2 \cdot tg v_1 \cdot tg v_2 \cdot \cos \beta) - h^2 \cdot \sin^2 \beta}}{k^2 - 2 \cdot k \cdot \cos \beta + 1}. \quad (2.6)$$

В формуле (2.6) знаменатель уже не близок нулю и в общем случае при $\beta \approx 90^\circ$ больше 1. Между тем, при $\beta = 0^\circ$ или $\beta = 180^\circ$ знаменатель равен $(1 \pm k)^2$ и в некоторых случаях может быть равен нулю. Однако практический интерес представляет задача, в которой выполняется условие

$$30^\circ > \beta > 150^\circ. \quad (2.7)$$

При выполнении условия (2.7) знаменатель (2.6) никогда не обращается в нуль и достигает минимального значения 0,25 на границе диапазона (2.7) при $k = \pm 0,866$.

Точность определения высоты в общем случае практически не зависит от абсолютных значений v_1 и v_2 , потому что при уменьшении их абсолютных значений наряду с увеличением ошибок определения расстояний, уменьшается влияние этих ошибок на вычисленную высоту, как следует из формулы тригонометрического нивелирования

$$h = d \cdot tg v.$$

В предельном случае, если v_1 или v_2 равны нулю, расстояния вообще не нужны, так как высота определяемого пункта будет равна высоте одного из опорных пунктов.

Было выполнено математическое моделирование задачи для небольших углов наклона. Оно показало справедливость сделанных выводов.

В настоящее время довольно широко применяются электронные тахеометры с возможностью измерения расстояний в безотражательном режиме. В

этой связи представляет интерес обратная засечка, в которой измерено расстояние d_{AP} и горизонтальный угол β (рис. 2.3). По двум измеренным элементам вычисляются две плановые координаты определяемого пункта.

Рассмотрим выгоднейшие условия такой засечки. Точность засечки зависит от угла между двумя линиями положения e и f . Линия e – это дуга окружности с центром в точке A , а линия f – дуга окружности, проходящей через все три точки: A , B и P .

Линия положения e перпендикулярна линии PA , а линия положения f перпендикулярна линии PO (рис. 2.4). Поэтому угол $\theta = \angle APO$ равен углу между линиями положения. Дополнением этого угла до 90° является угол $\gamma = \angle QOP$. Назовём последний углом неперпендикулярности линий положения. Чем меньше γ по абсолютному значению, тем ближе к 90° угол между линиями положения, тем лучше засечка.

Два угла $\angle AOP$ и $\angle ABP$ опираются на одну и ту же дугу окружности AP (рис. 2.4). Но вершина первого угла находится в центре окружности, а вершина второго угла лежит на окружности, поэтому первый угол вдвое больше второго. Следовательно $\gamma = \angle QOP = \angle ABP$. Отсюда видим, что угол неперпендикулярности γ равен углу между линией базиса AB и направлением PB на второй опорный пункт. Чем ближе к нулю этот угол, тем лучше. И наоборот, если $\gamma = 90^\circ$, засечка не решается (рис. 2.5).

Координаты точки P можно вычислить по формулам

$$\sin \gamma = \frac{d_{PA}}{d_{AB}} \sin \beta, \quad (2.8)$$

$$\varphi = 180^\circ - \gamma - \beta, \quad (2.9)$$

$$X_P = X_A + d_{PA} \cdot \cos(\alpha_{AB} + \varphi), \quad (2.10)$$

$$Y_P = Y_A + d_{PA} \cdot \sin(\alpha_{AB} + \varphi). \quad (2.11)$$

Если $\gamma \approx 90^\circ$, то угол γ из формулы (2.8) выводится ненадёжно: при допустимых ошибках измерений правая часть в (2.8) может даже оказаться больше

1. Поэтому такая засечка не решается. Отсюда простой вывод: из двух возможных расстояний нужно измерять более короткое расстояние.

Выгоднейшие условия для этой засечки хорошо совпадают с общей схемой измерений, описанной в п. 2.1. При наблюдениях опорные точки А и В недоступны. Они нанесены на вертикальных плоскостях (ригелях опор моста), совпадающих с линией АВ. Поэтому точное расстояние с точки Р желательно измерять до той марки А или В, для которой линия визирования ближе к перпендикуляру к плоскости марки. Именно такая схема (рис. 2.6) наиболее рациональна для наблюдений всех марок.

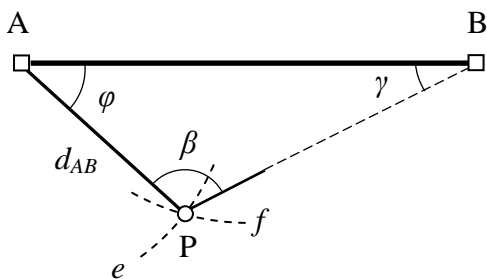


Рис. 2.3. Схема засечки.
Измерены d_{AB} и β

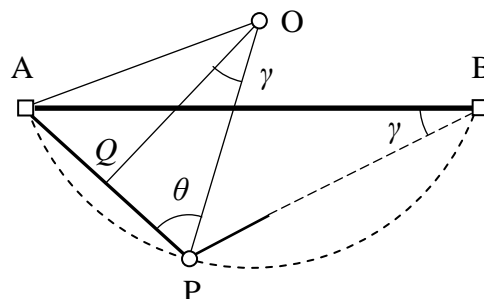


Рис. 2.4. Схема
нахождения угла γ

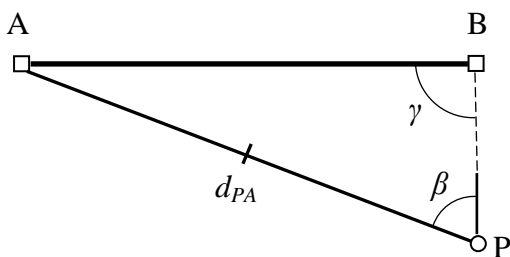


Рис. 2.5. Схема нерешаемой
засечки ($\gamma = 90^\circ$)

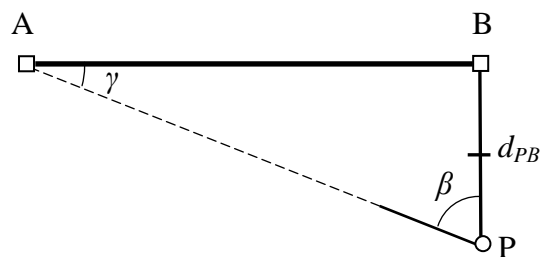


Рис. 2.6. Схема допустимой засечки
($\gamma < 60^\circ$)

При производстве измерений и наведениях зрительной трубы на марки не составляет труда кроме отсчётов по горизонтальному кругу отсчитывать и вертикальный круг. В результате получим метод, объединяющий оба рассмотренных метода, в котором измеряются горизонтальный угол, два вертикальных угла и одно расстояние. В этом методе одно измерение является из-

быточным, потому что по 4-м измерениям вычисляются 3 координаты определяемой точки.

Приведём пример.

Пусть координаты исходных пунктов равны (рис. 2.7)

$$x_A = 100, \quad y_A = 100, \quad H_A = 48,$$

$$x_B = 300, \quad y_B = 100, \quad H_B = 50.$$

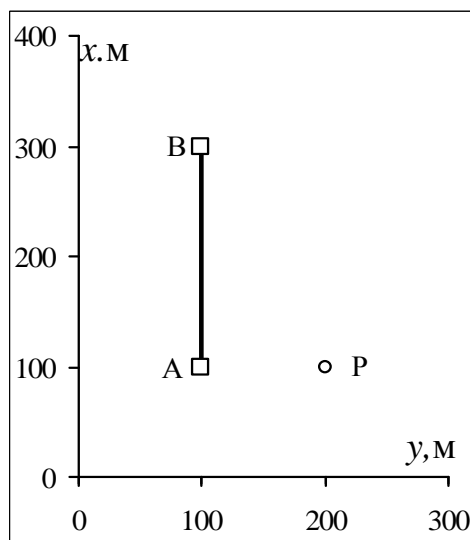


Рис. 2.7. Пример засечки

Если измерены только углы (градусы и доли):

$$\beta = 63,4349^\circ, \quad \nu_1 = 4,5739^\circ, \quad \nu_2 = 2,5606^\circ,$$

то вычисления по (3) дают 2 результата

$$d_1 = \frac{-0.12000 \pm 0.64000}{0.00520}; \quad d_1 = 100,000, \quad d_1' = -146,154. \text{ Второй резуль-}$$

тат отбрасываем.

По формулам (2.8, 2.9) получим

$$\gamma = 26,5651^\circ, \quad \varphi = 90,0000^\circ,$$

а по формулам (2.10, 2.11) и формуле тригонометрического нивелирования получим

$$x_P = 100,000, \quad y_P = 200,000, \quad H_P = 40,000.$$

Высота H_P вычисляется дважды – по сторонам PA и PB . Оба результата совершенно одинаковы.

Если измерено ещё и расстояние (например $d_{PA} = 100,000$), то одно измерение является избыточным, потому что по 4-м измерениям вычисляются 3 координаты определяемой точки.

Для вычислений параметрическим способом можно использовать формулы частных производных в уравнениях поправок соответственно при поправках в координаты δX_P , δY_P и δZ_P .

Для горизонтального угла

$$a_1 = \frac{\sin \alpha_{PB}}{l_{PB} \cdot \cos \nu_{PB}} - \frac{\sin \alpha_{PA}}{l_{PA} \cdot \cos \nu_{PA}}, \quad b_1 = -\frac{\cos \alpha_{PB}}{l_{PB} \cdot \cos \nu_{PB}} + \frac{\cos \alpha_{PA}}{l_{PA} \cdot \cos \nu_{PA}}, \quad c_1 = 0. \quad (2.12)$$

Для вертикального угла на т. А

$$a_2 = \frac{\sin \nu_{PA} \cdot \cos \alpha_{PA}}{l_{PA}}, \quad b_2 = \frac{\sin \nu_{PA} \cdot \sin \alpha_{PA}}{l_{PA}}, \quad c_2 = -\frac{\cos \nu_{PA}}{l_{PA}}. \quad (2.13)$$

Для вертикального угла на т. В

$$a_3 = \frac{\sin \nu_{PB} \cdot \cos \alpha_{PB}}{l_{PB}}, \quad b_3 = \frac{\sin \nu_{PB} \cdot \sin \alpha_{PB}}{l_{PB}}, \quad c_3 = -\frac{\cos \nu_{PB}}{l_{PB}}. \quad (2.14)$$

Для наклонного расстояния на т. А

$$a_4 = \cos \alpha_{PA} \cdot \cos \nu_{PA}, \quad b_4 = -\sin \alpha_{PA} \cdot \cos \nu_{PA}, \quad c_4 = -\sin \nu_{PA}. \quad (2.15)$$

В формулах буквой l обозначено наклонное расстояние.

Представляет интерес оценка точности. Она выполнена по частным производным функции неизвестных по измеренным элементам [52]. Эта матрица f частных производных размером $k \times n$ (k – число неизвестных, n – число измерений) полезна ещё и тем, что показывает влияние каждого измерения на каждое неизвестное: чем больше по модулю элемент матрицы f , тем больше влияние этого измерения на величину данного неизвестного.

Производные могут быть найдены в численном виде по формулам [52]

$$f = \frac{\partial z(l)}{\partial l} = \frac{z(l + \varepsilon) - z(l)}{\varepsilon}, \quad (2.16)$$

где $z(l)$ – вектор-функция вычисленных неизвестных; ε – небольшое приращение измеренного элемента.

Матрицу Q обратных весов неизвестных найдём по формуле

$$Q = fP^{-1}f^T, \quad (2.17)$$

где P^{-1} – диагональная матрица обратных весов измерений.

Средние квадратические ошибки неизвестных x , y и H найдём по формулам

$$m_x^2 = m_0^2 Q_{11}, \quad m_y^2 = m_0^2 Q_{22}, \quad m_H^2 = m_0^2 Q_{33}, \quad (2.18)$$

где m_0 – средняя квадратическая ошибка единицы веса; Q_{11} , Q_{22} , Q_{33} – соответствующие элементы матрицы Q .

Оценка точности раздельно по осям x и y не всегда корректна, особенно если в матрице Q неквадратичные коэффициенты Q_{12} имеют заметную величину. Поэтому дополнительно рассчитывались элементы эллипса ошибок по формулам:

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}}, \quad (2.19)$$

$$a = \frac{m_\beta}{\rho} (Q_{xx} + Q_{xy} \operatorname{tg} \alpha)^{\frac{1}{2}}, \quad b = \frac{m_\beta}{\rho} (Q_{yy} - Q_{xy} \operatorname{tg} \alpha)^{\frac{1}{2}},$$

где α – дирекционный угол большой оси эллипса ошибок для 2-х плановых координат; a , b – большая и малая полуоси эллипса.

Анализ точности выполнен для схемы, представленной на рис. 2.7. В ней высоты исходных пунктов одинаковы, а высота точки P меньше на величину превышения h_A . Возьмём для примера средние квадратические ошибки измерения горизонтального и 2-х углов наклона $m_\beta = 5''$, а расстояний $m_d = 5$ мм.

Примем вес углов $p_\beta = 1$. Тогда $p_d = \left(\frac{m_\beta}{\rho'' \cdot m_d} \right)^2 = (0,005)^2$.

Если измерены только 3 угла (горизонтальный и 2 угла наклона), то для превышения $h_A = 10$ м матрица частных производных имеет вид

$$f_1 = \begin{pmatrix} 100 & -507 & 1125 \\ -50 & -1009 & 2238 \\ 5 & 0 & -224 \end{pmatrix},$$

в которой по строкам сверху вниз приведены частные производные от функций x , y и H , по столбцам слева направо – производные по β , v_1 и v_2 соответственно. Размерность производных м/рад. Матрицу можно преобразовать к размерности мм/сек.дуги

$$f'_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & -2,5 & 5,5 \\ -0,2 & -4,9 & 10,9 \\ 0 & 0 & -1,1 \end{pmatrix},$$

которая показывает на сколько миллиметров смещается точка Р, если измеренный угол изменяется на 1".

Точность по осям составляет

$$m_x = 31 \text{ мм}, \quad m_y = 61 \text{ мм}, \quad m_H = 5,6 \text{ мм},$$

а параметры эллипса ошибок равны

$$a = 69 \text{ мм}, \quad b = 2,8 \text{ мм}, \quad \alpha = 63^\circ.$$

Для $h_A = 5$ м будем иметь

$$f_2 = \begin{pmatrix} 100 & -1004 & 2239 \\ -50 & -2004 & 4473 \\ 3 & 0 & -224 \end{pmatrix};$$

$$m_x = 61 \text{ мм}, \quad m_y = 123 \text{ мм}, \quad m_H = 5,6 \text{ мм};$$

$$a = 137 \text{ мм}, \quad b = 2,8 \text{ мм}, \quad \alpha = 63^\circ.$$

Отсюда видим, что эллипс сильно вытянут (по дуге окружности, проведенной через 3 точки) и на точность оказывает большое влияние превышение h_A . Чем больше превышение, тем точнее результат.

Если $h_A = 0$, но дополнительно измерено расстояние до пункта А (правый столбец матрицы), то точность гораздо лучше:

$$f_3 = \begin{pmatrix} 125 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0 \\ 0 & -83 & -37 & 0,0 \end{pmatrix};$$

$$m_x = 4,0 \text{ мм}, \quad m_y = 5,0 \text{ мм}, \quad m_H = 2,3 \text{ мм};$$

$$a = 5,8 \text{ мм}, \quad b = 2,7 \text{ мм}, \quad \alpha = 55^\circ.$$

Для производных по расстоянию в матрице приведено на 1 знак больше, потому что они затем умножаются на большие числа.

Из матрицы f_3 видно, что измерение углов наклона не оказывает влияния на точность x и y , а измерение горизонтального угла и расстояния не влияет на точность H .

Между тем при очень большом превышении $h_A = 50$ м имеем некоторое изменение точности, но матрица совсем другая:

$$f_4 = \begin{pmatrix} 139 & -42 & 33 & 0,4 \\ -4 & -65 & 36 & 0,8 \\ 7 & -76 & -57 & -0,3 \end{pmatrix};$$

$$m_x = 4,3 \text{ мм}, \quad m_y = 4,5 \text{ мм}, \quad m_H = 2,9 \text{ мм};$$

$$a = 5,5 \text{ мм}, \quad b = 2,9 \text{ мм}, \quad \alpha = 47^\circ.$$

Если измерены горизонтальный угол и расстояние до пункта B (вместо пункта A), то результат как показано выше неудовлетворительный (при $h_A = 0$), хотя малая полуось эллипса небольшая

$$f_5 = \begin{pmatrix} 86 & \infty & \infty & -0,1 \\ -19 & \infty & \infty & 0,3 \\ 0 & 0 & -224 & 0 \end{pmatrix};$$

$$m_x = \infty, \quad m_y = \infty, \quad m_H = 5,6 \text{ мм};$$

$$a = \infty, \quad b = 2,4 \text{ мм}, \quad \alpha = 63^\circ.$$

При $h_A = 10$ м результат несколько улучшается

$$f_6 = \begin{pmatrix} 86 & -507 & 1125 & -0,1 \\ -19 & -1010 & 2237 & 0,3 \\ 1 & 0 & -224 & 0 \end{pmatrix};$$

$$m_x = 31 \text{ мм}, \quad m_y = 61 \text{ мм}, \quad m_H = 5,6 \text{ мм};$$

$$a = 69 \text{ мм}, \quad b = 2,4 \text{ мм}, \quad \alpha = 63^\circ.$$

но эллипс очень сильно вытянут.

Высота точки P , если измерялись углы наклона, вычисляется для всех вариантов достаточно точно и она составляет от 2,3 до 5,6 мм.

Таким образом, в общем случае 3 координаты станции могут быть определены по измеренным углам (горизонтальным и вертикальным) на два опорных пункта. Такая задача бесконтрольна и в редких случаях может быть неопределённой для плановых координат. Предлагается в качестве избыточного измерения делать измерение расстояния до ближайшего опорного пункта.

2.2.2 Задача Ганзена

В предыдущей задаче определяется одна точка по двум опорным пунктам. Для наблюдений марок с двух концов базиса актуальной является также задача определения сразу двух точек по наблюдениям двух опорных пунктов.

Если измеряются только горизонтальные углы, то это задача Ганзена (рис. 2.8). Она приведена в справочнике [79] где указано, что наибольшая

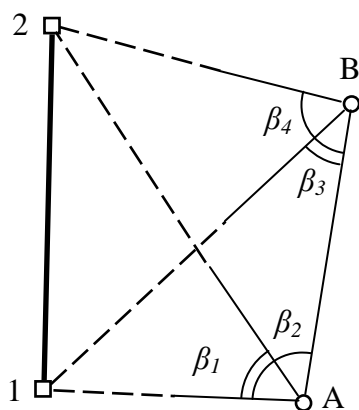


Рис. 2.8. Схема задачи Ганзена

точность определения координат будет получена, когда образованный четырёхугольник будет близок к квадрату (или ромбу). Анализ задачи на компьютере показывает, что условия выгоднейших измерений гораздо сложнее. Об этом пишет также автор [93], хотя некоторые детали он возможно упрощает. Проанализируем эту задачу.

В задаче 6 измерений, по которым находят 6 неизвестных: координаты X_A, Y_A, X_B, Y_B точек А и В, и ориентирующие углы ϑ_A, ϑ_B в точках А и В (табл. 2.1).

Таблица 2.1. Коэффициенты уравнений поправок

Номер измерения	Точка стояния	Точка визирования	Неизвестные					
			X_A	Y_A	X_B	Y_B	ϑ_A	ϑ_B
1	A	B	a_1	b_1	c_1	d_1	-1	0
2	A	1	a_2	b_2	0	0	-1	0
3	A	2	a_3	b_3	0	0	-1	0
4	B	A	a_4	b_4	c_4	d_4	0	-1
5	B	1	0	0	c_5	d_5	0	-1
6	B	2	0	0	c_6	d_6	0	-1

Коэффициенты имеют вид

$$a_i = \frac{\sin \alpha_i}{s_i} \quad (i = 1 \dots 3), \quad a_i = -\frac{\sin \alpha_i}{s_i} \quad (i = 4), \quad (2.20)$$

$$b_i = -\frac{\cos \alpha_i}{s_i} \quad (i = 1 \dots 3), \quad b_i = \frac{\cos \alpha_i}{s_i} \quad (i = 4), \quad (2.21)$$

$$c_i = -\frac{\sin \alpha_i}{s_i} \quad (i = 1), \quad c_i = \frac{\sin \alpha_i}{s_i} \quad (i = 4 \dots 6), \quad (2.22)$$

$$d_i = \frac{\cos \alpha_i}{s_i} \quad (i = 1), \quad d_i = -\frac{\cos \alpha_i}{s_i} \quad (i = 4 \dots 6), \quad (2.23)$$

где α_i – дирекционный угол; s_i – горизонтальное проложение. Размерность уравнений поправок – радианы.

Для нахождения весов неизвестных использовалась псевдообратная матрица, сумма квадратов столбцов которой давала обратный вес неизвестного. Анализ точности по псевдообратной матрице [35] даёт возможность оценить влияние данного (любого) измерения для данного (любого) неизвестного, потому что элементом псевдообратной матрицы является величина, на которую изменится данное неизвестное, если данное измерение увеличить на единицу.

Составлены программы нахождения псевдообратной матрицы по следующим формулам.

Исходной является матрица уравнений поправок A . Уравнения уже приведены к одинаковым весам. Матрица нормальных уравнений N вычисляется как произведение матриц

$$N = A^T \cdot A. \quad (2.24)$$

Затем вычисляется обратная матрица

$$Q = N^{-1} \quad (2.25)$$

и псевдообразная матрица

$$A^{-1} = A \cdot Q. \quad (2.26)$$

Для контроля составленной программы использовалось равенство

$$A^T \cdot A^{-1} = E, \quad (2.27)$$

где E - единичная матрица.

Псевдообразная матрица может быть получена также ортогонализацией исходной матрицы [69].

Программа составлена с использованием языка "Visual Basic Reference", который имеет нужные встроенные функции транспонирования матриц (.Transpose), произведения матриц (.MMult) и нахождения обратной матрицы (.MInverse).

Для анализа задачи в электронных таблицах Excel были составлены также программы нахождения средних квадратических ошибок неизвестных в зависимости от взаимного расположения 4-х пунктов: 1, 2, A и B. Все ячейки таблиц увязаны формулами так, что для получения результата достаточно изменить только координаты нужной точки. Можно также мышью переместить на рисунке нужную точку и сразу получить в ячейке искомый результат.

Анализировалась только симметричная схема задачи, в которой линия АВ параллельна линии 1-2, а линия, соединяющая середины линий АВ и 1-2, перпендикулярна последним.

Анализ задачи Ганзена для симметричной схемы показал, что точность определения координат точек А и В увеличивается при уменьшении расстояний до точек 1 и 2. Минимальная средняя квадратическая ошибка, равная

$$m = \sqrt{2} \cdot m_N \cdot s, \quad (2.28)$$

где m_N - ср.кв. ошибка измеренного направления в радианах; s - расстояние между опорными пунктами, получается для точек А и В, находящихся вблизи точек 1 и 2. Однако ошибки по осям X и Y при этом сильно различаются.

В симметричной схеме точки А и В находятся на одинаковых расстояниях и одинаковых углах относительно точек 1 и 2 соответственно. Представляет интерес несимметричная схема, когда линия 1-2 перпендикулярна линии АВ. Такая схема даёт лучшую точность. Однако для мостов она не подходит, поэтому здесь не рассматривается.

Дополнительно составлена программа нахождения эллипса ошибок для определяемой точки. Формулы взяты из Справочника [77], преобразованы для более общего случая и приведены к виду:

$$\text{азимут большой оси эллипса } \theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot q_{xy}}{q_{xx} - q_{yy}}, \quad (2.29)$$

$$\text{для большой полуоси } a^2 = q_{xx} + q_{xy} \cdot \operatorname{tg} \theta, \quad (2.30)$$

$$\text{для малой полуоси } b^2 = q_{yy} - q_{xy} \cdot \operatorname{tg} \theta, \quad (2.31)$$

где q_{xx} , q_{xy} , q_{yy} - коэффициенты весовой матрицы (обратной к матрице нормальных уравнений).

Полуоси a и b в формулах имеют размерность м/рад. Представляет интерес эллипс ошибок для конкретной точности измерений. Так для средней квадратической ошибки измерения направления 5" и размеров эллипса в миллиметрах получим

$$A = a/40, \quad B = b/40. \quad (2.32)$$

Построение эллипсов для разных условий измерений приведено в разделе 3.

Для симметричной схемы задачи Ганзена через 4 точки можно провести окружность. По этой окружности приблизительно располагается большая ось эллипса ошибок. Это связано с тем, что при перемещении определяемой точки по этой окружности измеренные углы будут неизменными. Задача бы-

ла бы неопределённой, если бы была только одна определяемая точка, а остальные 3 точки - опорными.

Таким образом, кратко описана составленная программа для анализа задачи Ганзена. Использование программы показало, что максимальной точности плановых координат двух станций соответствует условие, когда расстояния от станций до опорных пунктов в несколько раз короче расстояния между опорными пунктами. Более детально этот вопрос освещён в п. 3.2.

2.2.3 Определение координат двух станций без взаимных наблюдений и опорных пунктов

Эта задача на первый взгляд почти бессмысленна, поэтому в литературе не описана и не находит применения на практике. Тем не менее она имеет значение для предлагаемых методов съёмки нижнего пояса балок моста и совместного определения прогибов и изгибов балок моста.

Предлагаемые методы будут востребованы, если полевые работы по определению координат 2-х станций выполняются просто. Желательно исключить рекогносцировку и предварительное закрепление точек станции. Поэтому по линии, соединяющей 2 станции, выполнить измерения невозможно. Вместе с тем координаты обеих станций нужно определить в единой системе координат. Но точность их для обеспечения упомянутых методов может быть на 1 - 2 порядка ниже точности определения координат марок при наблюдениях мостов.

Данная задача решается, если с обеих станций наблюдаются как минимум две точки (связующие), закреплённые на мосту, и измеряются не менее двух расстояний (рис. 2.9). Связующие точки (1 и 2) можно выбрать в начале первой и конце последней балок моста, куда доступ, как правило, обеспечен без труда. Их можно совместить с другими наблюдаемыми точками.

Точки можно отметить в нужном месте, например, маркером, ярким цветным карандашом или просто отметить на периллах моста мелом.

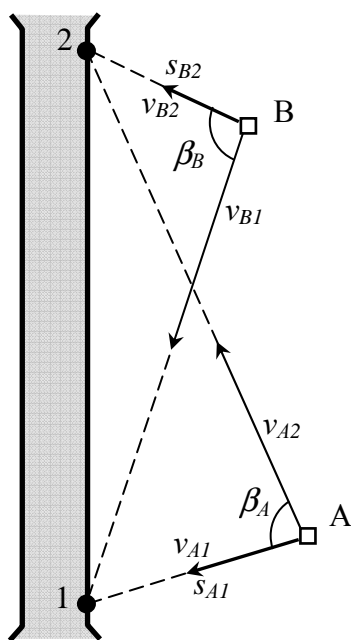


Рис. 2.9. Схема измерений

До одной из ближайших точек измеряется расстояние. На обе точки измеряются горизонтальные и вертикальные углы. Измерения нужно делать одновременно с наблюдениями балок.

В задаче делается 8 измерений с 12-ю неизвестными координатами 4-х точек. Однако координаты одной (любой) точки и ориентировку системы координат можно взять произвольно. В результате получим 8 неизвестных и система уравнений решается.

Неизвестные можно найти подбором на компьютере в указанной ниже последовательности.

Последовательности.

Возьмём произвольно 4 координаты: X_1 , Y_1 , Z_1 и Y_2 . Полезно приравнять $Y_2 = Y_1$. В этом случае ось X будет направлена по оси моста, как и делается на всех мостах при их наблюдениях. Подбираются 8 неизвестных координат: X_2 , Z_2 , X_A , Y_A , Z_A , X_B , Y_B , Z_B .

Для этого составляются 3 вида уравнений поправок:

- два уравнения для горизонтальных углов

$$\begin{aligned} v_1^\beta &= \alpha_{A2} - \alpha_{A1} - \beta_A, \\ v_2^\beta &= \alpha_{B2} - \alpha_{B1} - \beta_B, \end{aligned} \quad (2.33)$$

где $\alpha_{A1}, \dots, \alpha_{B2}$ - вычисленные дирекционные углы по координатам (2.64);

β_A, β_B - измеренные горизонтальные углы,

- четыре уравнения для углов наклона, вычисленные по формулам (2.65), (2.67),

- два уравнения для расстояний

$$\begin{aligned} v_1^s &= \sqrt{(X_1 - X_A)^2 + (Y_1 - Y_A)^2} \cdot \sec v_{A1} - s_{A1}, \\ v_2^s &= \sqrt{(X_2 - X_B)^2 + (Y_2 - Y_B)^2} \cdot \sec v_{B2} - s_{B2}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

где s_{A1} , s_{B2} - измеренные наклонные расстояния по линиям А1 и В2. Всего 8 уравнений.

Последние два уравнения умножаются на коэффициент

$$k = \frac{m_{\beta}}{m_s}, \quad (2.35)$$

уравнивающий вес линейных измерений с весом угловых измерений.

Выгоднейшие условия измерений в этой задаче совпадают с двумя условиями, рассмотренными в пп. 2.2.1. Во-первых, из двух расстояний до связующих точек нужно измерять более короткое расстояние. В некоторых случаях с двух станций А и В измеряются расстояния до одной и той же связующей точки, если обе станции находятся на одном берегу реки. Во-вторых, две станции нужно выбирать так, чтобы между ними было максимальное превышение, потому что точность результата определяется углом γ (рис. 2.13). Или иначе: одну станцию нужно выбирать в самой высокой точке, вторую - у уреза воды как можно ближе к мосту. Взаимное положение двух станций в плане значения почти не имеет.

Не исключается возможность измерения расстояния и до другой связующей точки. Она находится обычно на другом берегу реки и для измерения расстояния тахеометром можно использовать призму или отражающую марку. В этом случае появляются избыточные измерения. Измерения координат двух станций полезно выполнять при двух кругах тахеометра. Это позволит в случае необходимости вычислить коллимационную ошибку и место нуля и ввести их затем в измерения при съёмке балок.

Данный метод может быть использован также для увязки между собой двух систем координат на обеих сторонах моста, что необходимо делать и всегда делалось в первом цикле наблюдений марок. Для этого нужно, чтобы связующие точки 1 и 2 были видны со всех 4-х концов обоих базисов и наблюдения точек 1 и 2 целесообразно вести одновременно с наблюдениями марок.

Определения прогибов и изгибов балок, как и съёмку нижнего пояса балок моста тоже нужно делать с обеих сторон моста. Если связующие точки выбрать общими для обеих сторон, то в предлагаемом методе появляются избыточные измерения. И действительно, имеем 4 станции и 2 связующие точки. Всего нужно найти 18 координат. 4 из них можно взять произвольно. Отсюда получим 14 неизвестных, для определения которых делают 16 измерений.

Таким образом, рассмотрена возможность независимых наблюдений с двух станций на две связующие (не опорные) точки для определения 3-х координат двух станций в единой системе условных координат.

2.3 Анализ методов определения координат марок с двух станций

Проанализируем описанную в п. 2.1 схему измерений. В деталях она может иметь несколько вариантов (схем). Присвоим им номера:

- схема 1 описана в п. 2.1;
- схема 2 отличается от схемы 1 тем, что в ней не делаются угловые измерения по линии базиса;
- схема 3, в которой вместо наблюдений по линии базиса делаются измерения одного (меньшего) расстояния до опорной марки;
- схема 4 отличается от схемы 1 тем, что в ней дополнительно делаются измерения одного (меньшего) расстояния до опорной марки.

Во всех схемах при наблюдении марок делаются отсчёты по обоим кругам тахеометра.

2.3.1 Измерения марок с двух концов базиса

Рассмотрим выгоднейшие условия измерений в схеме 1, представленной на рисунке 2.10, в которой на двух точках А и В измерены горизонтальные и вертикальные углы. Пункты 1 и 4 являются опорными. Оценивается точность

определения координат точки 2 (или 3). Координаты станций А и В, хотя и определяются, но они являются промежуточными и точность их значения не имеет.

В редакторе "Excel" были составлены программы оценки точности для точки 2, включая построение эллипса ошибок, в зависимости от измеряемых элементов и взаимного положения точек.

В дополнение к формулам (2.20 - 2.23) коэффициенты уравнений поправок для измеренных углов наклона с точек А и В имеют вид:

$$a_i = \frac{\cos \alpha_i \cdot \sin 2\nu_i}{2s_i}, \quad (2.36)$$

$$b_i = \frac{\sin \alpha_i \cdot \sin 2\nu_i}{2s_i}, \quad (2.37)$$

$$c_i = -\frac{\cos^2 \nu_i}{s_i}, \quad (2.38)$$

где ν_i – угол наклона; s – горизонтальное проложение.

Для точек 2 и 3 формулы те же, но знаки обратные.

Результаты анализа для точки 2 (рис 2.10) представлены в таблице 2.2.

В схеме, в которой измерены только горизонтальные углы на точках А и В, нет избыточных измерений. Для 4-х марок на мосту имеем 10 измерений с 10-ю неизвестными. Для симметричной схемы максимальную точность для марки 2 (или 3) получим при таком расположении точек, как показано на рисунке 2.9. Если расстояние между крайними марками равно $a=100$ м, то длина базиса $b=AB$ равна 87 м, а его удаление от линии марок $c=32$ м. Эллипс ошибок для $m_N=5''$ имеет полуоси $A=2,7$ мм, $B=2,1$ мм и ориентировку $\Theta=90^\circ$. Минимум отыскивался для функции $F_1 = q_{xx} + q_{yy}$, что равносильно поиску минимума функции $F_2 = M_x^2 + M_y^2$.

Измерение вертикальных углов даёт избыточные измерения и несколько повышает точность определения плановых координат. Анализ влияния этих

измерений показывает, что чем больше измеряемые превышения h , тем выше конечная точность.

В таблице 2.2 представлена зависимость выгоднейших условий измерений от превышения h между линией базиса и линией марок. Для поиска минимума использовалась и третья компонента - ошибка определения высоты.

Поэтому минимум отыскивался для функции $F'_1 = q_{xx} + q_{yy} + q_{zz}$.

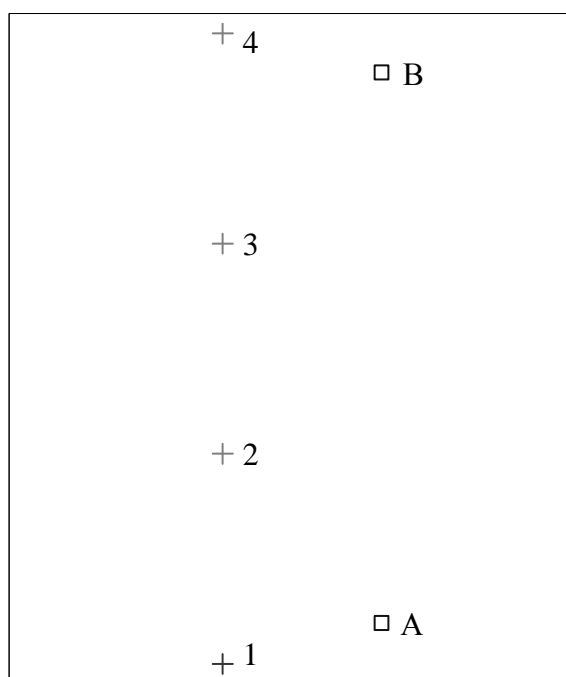


Рис. 2.10. Выгоднейшая схема измерений на т. А и В измерены горизонтальные направления.

Таблица 2.2. Выгоднейшие условия измерений. Измерены горизонтальные и вертикальные углы в схеме 1

Превышение h , м	Базис b , м	Расст. c , м	Эллипс, ось A , мм	Эллипс, ось B , мм	Эллипс, азимут θ , град	Ср. кв. ош высоты, m_H , мм
1	2	3	4	5	6	7
0	85	30	2,7	2,2	86	1,0
2	85	30	2,6	2,2	86	1,0
5	81	27	2,6	2,1	82	1,1
7	77	24	2,5	2,1	77	1,1
10	70	19	2,2	2,0	57	1,4
12	65	15	2,1	1,8	28	1,7
15	60	8	1,9	1,2	6	2,1

Из таблицы видно, что при небольших превышениях h базис b несколько короче расстояния $a=100$ м. Базис удалён от марок на расстояние 25-30 м. Эллипс ошибок близок к окружности. Точность определения высоты в 2-2,5 раза выше точности определения плановых координат. Это связано с тем, что высота каждой марки вычисляется дважды, как с точки А, так и с точки В.

При увеличении превышения точность плановых координат увеличивается, а точность высоты уменьшается. Увеличение точности плановых координат обусловлено увеличением влияния измерения вертикальных углов: появляются заметные углы в вертикальной угловой засечке. Уменьшение точности высоты обусловлено повышением влияния ошибок вычисленных расстояний.

Таким образом, анализ схемы 1 показывает, что точность плановых координат приблизительно соответствует величине

$$M = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} \approx \sqrt{2} \cdot m_N \cdot s, \quad (2.39)$$

где s - расстояние между опорными марками.

2.3.2 Измерения марок с двух точек без наблюдений между ними

В схеме 1 наблюдения углов по линии базиса составляют значительную часть полевых работ.

Если работы ведутся одним прибором, то точки А и В требуется закреплять на местности, а при наблюдениях нужно обеспечить требуемую точность центрирования прибора над точкой, исключение ошибки за редукцию визирной цели, измерения высоты прибора и установку высоты визирования.

Эти операции можно не выполнять при одновременной работе двумя приборами. Однако для этого нужно иметь две бригады исполнителей. Наблюдения по линии базиса выполняются в этом случае способом "труба в трубу". Точки на местности можно не закреплять.

В связи с этим возникает вопрос, а нельзя ли исключить наблюдения по линии базиса?

В этом случае вместо задачи Ганзена появляются задачи определения координат по двум пунктам, рассмотренные в п. 2.2.1. При этом координаты точек А и В будут получены независимо друг от друга.

Был выполнен анализ точности определения координат марок по наблюдениям горизонтальных и вертикальных углов без наблюдений линии базиса. В этой схеме 16 измерений и 14 неизвестных.

Таблица 2.3. Выгоднейшие условия измерений в схеме 2. Измерены горизонтальные и вертикальные углы без измерений по линии базиса

Превышение h , м	Базис b , м	Расст. c , м	Эллипс, ось A , мм	Эллипс, ось B , мм	Эллипс, азимут θ , град	Ср.кв.ош высоты, m_H , мм
1	2	3	4	5	6	7
0	-	-	∞	∞	-	1,8
0,5	92	5,5	74,1	9,6	4	1,8
1	90	7,6	38,3	7,0	6	1,8
2	85	10,1	20,3	5,2	7	1,8
5	73	13,2	9,2	3,5	7	1,9
10	62	13,3	5,3	2,5	7	2,3
20	57	6,2	3,3	1,1	1	2,9

Анализ результатов поиска минимума показывает, что точность плановых координат резко повышается при увеличении измеряемых углов наклона на опорные марки, вызванные увеличением превышений h и уменьшением расстояний c . Здесь координаты точек А и В определяются, в основном, угловой вертикальной засечкой. При $h=0$ (верхняя строка табл. 2.3) задача неопределённая, потому что в вертикальной засечке при $h=0$ угол засечки равен 0. Между тем, высота вычисляется и при $h=0$, что подтверждает теоретический анализ, сделанный в п. 2.2.1. Эллипс ошибок сильно вытянут по оси X , что является недостатком такого метода измерений.

Таким образом, в схеме 2 организация измерений существенно проще, чем в схеме 1. В компенсацию за это схема 2 значительно ниже по точности схемы 1. Точность схемы 2 повышается при увеличении по модулю углов наклона на опорные марки.

2.3.3 Измерения марок с двух точек с дополнительными измерениями расстояний

Вместо наблюдений по линии базиса можно выполнить для определения координат станций А и В измерения расстояния до ближайшей марки так, как описано в п. 2.2.1 Так как в этой задаче уравниваются совместно измерения углов и расстояний, следует умножить на \sqrt{p} уравнения поправок. Однако, чтобы не менять вес уравнений поправок для углов по сравнению с другими задачами, целесообразней умножить на коэффициент

$$k = \frac{m_N}{m_s} \quad (2.40)$$

только уравнения для расстояний.

Приняв, например, средние квадратические ошибки измерения направления $m_N = 5''$ и расстояния $m_s = 5$ мм, получим

$$k = \frac{m_N}{\rho'' \cdot m_s} = 0,005 \text{ м}^{-1} . \quad (2.41)$$

Коэффициенты уравнений поправок для измеренных наклонных расстояний имеют вид

$$a_i = \cos \alpha_i \cdot \cos v_i, \quad (2.42)$$

$$b_i = -\sin \alpha_i \cdot \cos v_i, \quad (2.43)$$

$$c_i = -\sin v_i, \quad (2.44)$$

На отдельном листе редактора "Excel" была составлена программа уравнивания измерений, в которой измерялись горизонтальные, вертикальные углы (кроме линии базиса) и расстояние до ближайшей опорной марки с точек А и В. Результаты нахождения минимума суммарной ошибки (по X, Y и Z) в зависимости от превышения h представлены в таблице 2.4.

В задаче есть 2 минимума. Один минимум при расстоянии s около 40 метров. Второй – при $s \approx 10$ метров и меньше. Второй минимум менее приемлем для наблюдений, так как при малом расстоянии до линии марок, прихо-

дятся некоторые марки наблюдать под очень острым углом к плоскости марки, что снижает точность наведений. У второго минимума вытягивается также эллипс ошибок. В помеченной строке (10*) таблицы, приведены значения не для минимума ошибки, а для наиболее подходящих расстояний $b=90$ м и $c=40$ м, потому что при поиске минимума при $h=10$ м. компьютер переходит на второй минимум (нижняя строка таблицы).

Таблица 2.4. Выгоднейшие условия измерений в схеме 3. Измерены горизонтальные, вертикальные углы и одно расстояние без измерений по линии базиса.

Превышение h , м	Базис b , м	Расст. c , м	Эллипс, ось A , мм	Эллипс, ось B , мм	Эллипс, азимут θ , град	Ср. кв. ош высоты, m_H , мм
1	2	3	4	5	6	7
0	97	43	3	2,7	-40	1,3
5	95	42	2,9	2,6	-38	1,3
8	90	39	2,9	2,6	-33	1,4
10*	90	40	2,8	2,6	-44	1,5
10	44	8	3,1	1,4	6	1,8

Сравнивая таблицу 2.4 с таблицей 2.2 видим, что точность метода, в котором вместо наблюдений по линии базиса (схема 1) измеряют расстояние до марки (метод 3), уменьшается на 10-20%. Небольшая потеря точности в компенсацию за сокращение объёма измерений, в некоторых случаях может быть оправдана.

В пользу схемы 3 говорит ещё такой факт. Ближайшая опорная марка обычно доступна, так как она закреплена или на береговой опоре или рядом с ней, и при измерении расстояния марку можно временно закрыть специальной светоотражающей плёнкой.

Очевидно, что для схемы 4 получим точность выше, чем для схемы 1 (см. п 3.3 и рис. 3.17)

Таким образом, для схемы 3 имеем почти такую же точность, как и для схемы 1. Если на мосту нет видимости по линии базиса, можно применить схему 3.

2.4 Измерения прогибов балок мостов

Иногда при испытаниях или диагностике мостов требуется определять прогибы балок. Обычно прогибы измеряют геометрическим нивелированием нижнего пояса балок. В простейшем случае нивелируют три точки балки: начало, середину и конец, вычисляя отклонение отсчёта по рейке в середине балки от среднего отсчёта в начале и конце балки. Если пролёт моста имеет заметный уклон, то середину балки при нивелировании нужно находить достаточно точно, что несколько усложняет измерения. Для части балок выполнить эту работу не представляется возможным из-за их труднодоступности.

Разработан и ниже приведен метод определения прогибов недоступных балок с использованием теодолита (тахеометра) без измерения расстояний. Теодолитом снимают отсчёты по горизонтальному и вертикальному кругам при наведении крестом сетки нитей на начало А, середину С и конец В линии нижнего внешнего ребра балки. Если балка прямолинейная, то на сферическом треугольнике она изобразится дугой большого круга А, С₀, В (рис. 2.11).

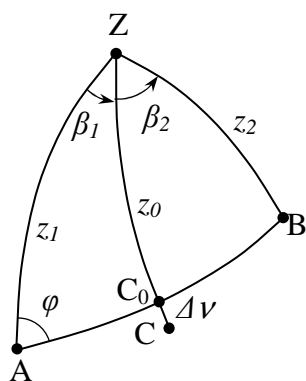


Рис. 2.11. Обозначения элементов в треугольниках

На рисунке обозначено: точка Z – зенит; β_1, β_2 – измеренные горизонтальные углы; z_1, z_2 – измеренные зенитные расстояния; φ – вспомогательный угол, z_0 – вычисленное зенитное расстояние для точки С₀, лежащей в пространстве на прямой АВ. Измеренное зенитное расстояние z_c для середины балки относится к точке С, имеющей прогиб, который нужно определить. Из-за прогиба появляется разность зенитных расстояний

$$\Delta V = z_0 - z_c. \quad (2.45)$$

По формуле 4-х элементов сферической тригонометрии [77] для двух треугольников будем иметь

$$\operatorname{ctg} z_2 \cdot \sin z_1 = \cos z_1 \cdot \cos(\beta_1 + \beta_2) + \sin(\beta_1 + \beta_2) \cdot \operatorname{ctg} \varphi, \quad (2.46)$$

$$ctgz_0 \cdot \sin z_1 = \cos z_1 \cdot \cos \beta_1 + \sin \beta_1 \cdot ctg \varphi. \quad (2.47)$$

Решив (2.46) относительно $ctg \varphi$, подставив полученное выражение в (2.47), сделав преобразования и замену зенитных расстояний на углы наклона $v = 90^\circ - z$, получим

$$tg v_0 = \frac{tg v_1 \cdot \sin \beta_2 + tg v_2 \cdot \sin \beta_1}{\sin(\beta_1 + \beta_2)}. \quad (2.48)$$

Отсюда прогиб балки, как длина вертикального отрезка Δh , выразится формулой

$$\Delta h = \frac{(v_c - v_0) \cdot d}{\cos^2 v_c}, \quad (2.49)$$

где d – горизонтальное расстояние от теодолита до точки C .

Балка может иметь кроме прогиба, ещё и изгиб Δy – непрямолинейность в горизонтальной плоскости (рис. 2.12). Поэтому формула (2.49) справедлива только для малых углов наклона, когда изгиб балки не влияет на измеренные углы. Между тем, когда измеряют приращение прогиба балки, например, при испытаниях моста под нагрузкой, влияние составляющей Δy в разности прогибов исключается, и углы наклона могут быть значительно больше.

Обе составляющие Δy и Δh можно найти, сделав измерения с двух точек и решив совместно два уравнения

$$\begin{aligned} a_1 \cdot \Delta y + b_1 \cdot \Delta h &= \Delta v_1, \\ a_2 \cdot \Delta y + b_2 \cdot \Delta h &= \Delta v_2, \end{aligned} \quad (2.50)$$

где $\Delta v = v_c - v_0$.

Коэффициенты a и b имеют вид

$$a = \frac{1}{d} \left(\frac{tg v_1 \cdot \cos \beta_2 - tg v_2 \cdot \cos \beta_1}{\sin(\beta_1 + \beta_2)} \cos^2 v_c \cdot \cos \theta - \sin v_c \cdot \cos v_c \cdot \sin \theta \right), \quad (2.51)$$

$$b = \frac{\cos^2 v_c}{d}, \quad (2.52)$$

где θ - горизонтальный угол между линиями балки и визирования.

Формула (2.51) выводится с некоторыми особенностями, поэтому она довольно громоздкая и правильность её может вызвать сомнения.

Для контроля вывода формул было выполнено математическое моделирование. На три точки балки – начало, середину и конец – вычислялись по координатам горизонтальные и вертикальные углы. Затем в координаты середины балки вводились смещения Δu и Δh , вычислялись новые углы, которые подставлялись в формулы (2.48, 2.50-2.52). Вычисленные составляющие Δu и Δh всегда совпадали с введёнными значениями. Заметим, что формулы справедливы и для негоризонтальной балки.

Приведенный метод определений с двух точек имеет некоторые особенности.

Две точки наблюдений могут находиться недалеко друг от друга и иметь близкие между собой зенитные расстояния на точки балки. Тем не менее,

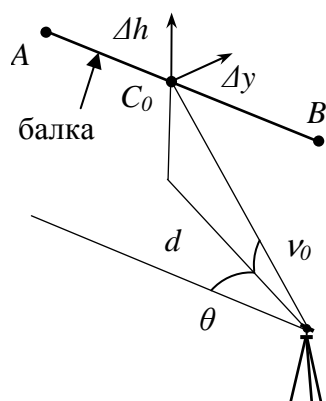


Рис. 2.12. Схема измерений

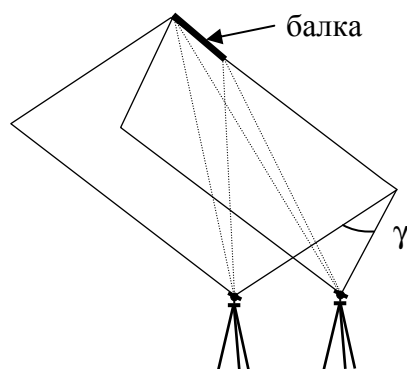


Рис. 2.13. Наблюдения с двух точек

уравнения (2.50) решаются надёжно. Обусловленность системы (2.50) зависит не от разности измеренных углов с двух точек, а от угла γ между двумя плоскостями, содержащими линию балки и точку наблюдений (рис. 2.13). По аналогии с прямой угловой засечкой можно установить допуск на минимальную величину угла γ в 30° .

Хотя наведения теодолитом на линию балки по вертикали следует выполнять максимально точно, не обязательно точно наводить на середину балки по горизонтали, как и не обязательно точно наводить на одни и те же точки балки при обеих установках теодолита. Нет также необходимости закреплять обе точки стояния теодолита и делать между ними взаимные привязки.

Углы θ и расстояния d можно измерять с пониженной точностью, до 2-3 значащих цифр.

Обычно наблюдают все балки с одной стороны моста. В этом случае можно измерить одно какое-нибудь расстояние, например, кратчайшее расстояние до линии балок. Остальные расстояния d вычисляются. Вычисляются и все углы θ : нужно только снять один отсчёт по горизонтальному кругу по линии, параллельной или перпендикулярной оси моста.

Следует отметить, что теоретически обе составляющие Δu и Δh можно определить с одной точки стояния теодолита, если дополнительно измерять расстояния до наблюдаемых точек балки, например, безотражательным тахеометром. Формулы при этом будут гораздо проще. Однако острые углы между линией визирования и плоскостью балки, приводящие к увеличению ошибок измерения расстояний, затрудняют реализовать на практике такой метод.

В этой задаче актуальным является вопрос обеспечения требуемой точности наведения на середину балки. Сделать какие-то метки на недоступной балке невозможно. Балки как правило наблюдаются под углом и средний отсчёт по горизонтальному кругу из отсчётов на начало и конец балки не даёт середину балки. Оценим величину ошибки в вычисленном прогибе в зависимости от ошибки нахождения середины балки при измерениях.

Пусть балка длиной l имеет прогиб Δh . Линия балки может иметь форму окружности, параболы, цепной линии и более сложной кривой (рис 2.14).

Анализ показывает, что вследствие малости Δh по сравнению с l для решения данной задачи вполне можно использовать только уравнение параболы

$$y = \frac{4 \cdot \Delta h}{l} \cdot \left(x - \frac{x^2}{l} \right). \quad (2.53)$$

Формула (2.49) выведена при условии выполнения 3-х условий:

$$y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0;$$

$$y = \Delta h \quad \text{при } x = l/2; \quad (2.54)$$

$$y = 0 \quad \text{при } x = l.$$

Возьмём заведомо крайний случай, когда вместо середины балки O (рис. 2.14) наведение выполнено с ошибкой так, что расстояние AC в два раза меньше расстояния CB , т.е. $AC \approx l/3$. Измеренным прогибом будет являться расстояние Δh_c . Подставив в (2.53) $x = l/3$, получим

$$y = \Delta h_c = \frac{8}{9} \Delta h = 0,89 \cdot \Delta h. \quad (2.55)$$

Следовательно получим ошибку в прогибе 11%, что, пожалуй, можно считать допустимым для недоступной балки. Кстати, если ошибку наведения на середину балки уменьшить вдвое, что ближе к истине, ошибку в прогибе получим в 4 раза меньше и она составит лишь 2,8%.

С точки стояния прибора не всегда видна вся балка. Иногда детали опоры закрывают начало или конец балки. В этом случае измерения выполняются не для всей длины балки, а только её части. Оценим влияние этой ошибки.

Если вместо начала балки A (рис. 2.15) наведение выполнено на т. C , то подставив в (2.53) $x = a$, $y = b$, получим

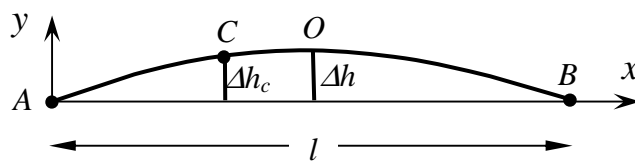


Рис. 2.14. Влияние ошибки наведения на середину балки

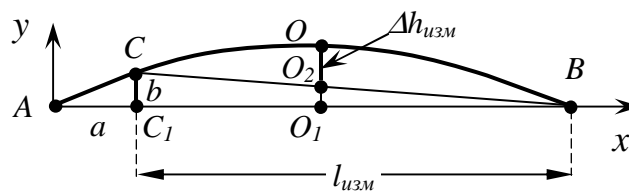


Рис. 2.15. Влияние ошибки наведения на начало балки

$$b = \frac{4 \cdot \Delta h}{l} \left(a - \frac{a^2}{l} \right). \quad (2.56)$$

При этом будет допущена ошибка в прогибе, равная длине отрезка O_1O_2

$$O_1O_2 = \Delta h - \Delta h_{изм} = b \cdot \frac{l}{2(l-a)}. \quad (2.57)$$

Подставив (2.56) в (2.57) и сделав преобразования, получим

$$\Delta h - \Delta h_{изм} = 2 \cdot \Delta h \frac{a}{l}. \quad (2.58)$$

Откуда будем иметь

$$\Delta h = \Delta h_{изм} \frac{l}{l-2a}. \quad (2.59)$$

Или с учётом равенства $l_{изм} = l - a$

$$\Delta h = \Delta h_{изм} \frac{l}{2l_{изм} - l}. \quad (2.60)$$

Формулу (2.59) можно преобразовать к более наглядному, хотя и не строгому виду

$$\Delta h \approx \Delta h_{изм} \frac{l^2}{(l-a)^2} = \Delta h_{изм} \left(\frac{l}{l_{изм}} \right)^2. \quad (2.61)$$

Расчёт по выведенным формулам показывает, что при $l/l_{изм} = 1,1$, что редко может быть больше, измеренный прогиб нужно увеличить на 20%, а вычисления по формулам (2.60) и (2.61) отличаются только на 1%. Поэтому рекомендуется пользоваться формулой (2.61).

Таким образом, в предлагаемом методе определения прогибов (и изгибов) балок автомобильного моста наблюдения предельно просты за счёт довольно сложной обработки измерений. При использовании компьютера последнее не является проблемой.

2.5 Съёмка нижнего пояса балок моста

При паспортизации автомобильных мостов, которые проводятся через определённые интервалы времени, всегда делают нивелирование проезжей части моста и строят затем продольные и поперечные профили. По ним судят о неизменности положения элементов моста по высоте. Очевидно, что более объективную оценку стабильности моста можно было бы выполнить путём нивелирования нижнего пояса балок. Однако такое нивелирование не делают вследствие труднодоступности или недоступности балок.

В наши дни широко используются тахеометры с возможностью измерений расстояний в безотражательном режиме. Нивелирование балок моста можно выполнить полярным способом. Однако, как уже указывалось ранее, главным недостатком этого способа для нивелирования мостов являются ошибки измерения расстояний при острых углах между линией визирования и плоскостью наблюдений. Дополнительные ошибки здесь могут быть при измерении расстояний до ребра балки, когда небольшое отклонение по высоте или азимуту может приводить к значительной ошибке в расстоянии. Съёмку балок моста можно было бы выполнять прямой угловой засечкой подобно рассмотренным выше методам определения координат марок, если бы была возможность помечать, например краской, нивелируемые точки балок. Если снимаемые точки не помечены, то невозможно с двух станций наводить на одни и те же точки балок, поэтому невозможно применить угловую засечку.

Нижнее внешнее ребро крайних балок моста всегда отчётливо видно. Линия, как правило, имеет мало сколов и изъянов, потому что линия не доступна и практически не изнашивается со временем. Тем не менее, при визировании зрительной трубой прибора на эту линию имеющиеся сколы и дефекты отчётливо видны и всегда можно правильно навести на линию балок, избегая непрямолинейных участков или учесть непрямолинейность в том месте, куда нужно наводить. Остаётся разработать методику съёмки этой линии, по которой можно составить продольный профиль.

Допустим, с двух станций измерены горизонтальные и вертикальные углы на начало и конец ребра одной балки моста (рис. 2.16). Будем считать, что 4 точки наведения, по две с каждой станции, лежат на одной прямой, потому что две точки в начале балки, как и две - в конце балки, хотя и не совпадают

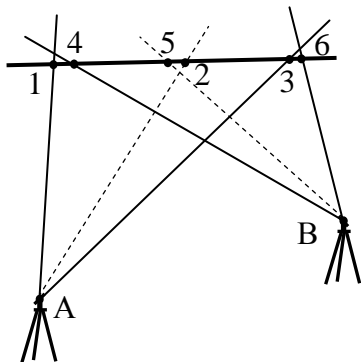


Рис. 2.16. Схема засечки балки

между собой, но находятся недалеко друг от друга по сравнению с длиной балки. В результате имеем одну прямую, проведенную через две точки в пространстве.

Анализ данной задачи приводит к следующей теореме. Через 4 прямые в пространстве, любые 3 из которых не параллельны между собой и не пересекаются в одной точке, можно провести одну прямую

так, чтобы она пересекала каждую из 4-х прямых. Две прямые из 4-х могут быть или параллельными или пересекаться в пространстве. Одновременно и две другие прямые тоже могут быть или параллельными или пересекаться.

Данная задача сводится к определению 8-ми неизвестных по 8-ми измерениям. Все три координаты обеих станций считаются известными.

Измерениями являются 2 горизонтальных угла (3 направления, включая измерения на смежную станцию) и 2 вертикальных угла для одной станции. Столько же измерений для другой станции. Всего 8 измерений.

Для неизвестных есть несколько вариантов. В одном из них содержатся 3 координаты одной (назовём её начальной) из 4-х точек балки, дирекционный угол и угол наклона наблюдаемой линии балки, и 3 расстояния от начальной точки до 3-х других. Всего 8 неизвестных. По ним можно вычислить все 12 координат 4-х точек балки.

Целесообразно в этой съёмке делать измерения и на середину балки (возможно и на четверть балки). Для этого с обеих станций измеряют горизонтальные и вертикальные углы одновременно и на середину балки. Это ещё 4 измерения. По ним находим 2 составляющие отклонения средней точки от

прямой линии и два расстояния от начальной точки до обеих наблюдаемых точек. Неизвестных тоже 4.

Геометрически дополнительная задача выглядит так. С двух станций имеем две прямые, пересекающие середину балки, но в общем случае не пересекающиеся между собой. Через них нужно провести одну прямую, параллельную линии, соединяющей начало и конец балки. Такую прямую всегда можно провести. Отклонения прямой в плане и по высоте от этой линии даёт изгиб и прогиб балки.

Ниже рассмотрены два способа обработки измерений: итерациями и по формулам пространственной геометрии. Выбор способа зависит от наличия избыточных измерений. Если, например, измерены дополнительно некоторые расстояния, то следует применять первый способ, решая задачу на компьютере подбирая неизвестные. Второй способ предпочтительней, когда нет избыточных измерений. Если даже наблюдения выполнены при двух кругах тахеометра, вычисления полезно выполнять вторым способом, но отдельно для одного и другого круга. Осреднение отсчётов, полученных при двух кругах, как это принято традиционно в геодезии, здесь не желательно, так как наведения при двух кругах здесь выполняются на разные точки и отсчёты могут существенно различаться между собой. А это может привести к заметным ошибкам второго порядка малости.

Таким образом, предложена методика съёмки недоступного нижнего пояса линии балок моста путём измерения горизонтальных и вертикальных углов на точки балки с двух станций.

2.5.1 Обработка измерений итерациями

Вычисления итерациями предлагается делать по следующей схеме.

Обозначим координаты и ориентирующие углы ϑ для станции А: $X_A, Y_A, Z_A, \vartheta_A$ и для станции В: $X_B, Y_B, Z_B, \vartheta_B$.

Профиль можно составлять в условной системе координат, поэтому определение координат станций упрощается. Три координаты одной станции, например А, и дирекционный угол α_{AB} на станцию В можно взять произвольно. Координаты станции В вычисляются из решения прямой геодезической задачи по указанным данным, а также измеренному расстоянию и углу наклона. При необходимости учитывают высоту прибора и высоту визирования. Ориентирующие углы вычисляются по формулам

$$\vartheta_A = \alpha_{AB} - N_B^A, \quad \vartheta_B = \alpha_{AB} \pm 180^\circ - N_A^B, \quad (2.62)$$

где N_B^A, N_A^B - измеренные горизонтальные направления со станций А и В на станции В и А соответственно.

Обозначим цифрами 1, 2 и 3 ($i=1, 2, 3$) измерения, выполненные со станции А на начало, середину и конец балки и цифрами 4, 5 и 6 измерения, выполненные со станции В на начало, середину и конец балки соответственно. Эта же нумерация сохраняется и для точек на балке.

Вычисляют координаты точек на балке

$$\begin{aligned} X_i &= X_1 + l_i \cdot \cos \alpha_{бал} & (i = 2, \dots, 6), \\ Y_i &= Y_1 + l_i \cdot \sin \alpha_{бал} + \Delta y & (i = 2, 5), \\ Y_i &= Y_1 + l_i \cdot \sin \alpha_{бал} & (i = 3, 4, 6), \\ Z_i &= Z_1 + l_i \cdot \operatorname{tg} \nu_{бал} + \Delta z & (i = 2, 5), \\ Z_i &= Z_1 + l_i \cdot \operatorname{tg} \nu_{бал} & (i = 3, 4, 6), \end{aligned} \quad (2.63)$$

где l_i - горизонтальные расстояния по линии балки от точки 1 (начальной) до i -ой точки; $\alpha_{бал}, \nu_{бал}$ - дирекционный угол и угол наклона линии, соединяющей начало и конец балки; $\Delta y, \Delta z$ - составляющие по осям y и z отклонения середины балки от линии, соединяющей начало и конец балки.

По этим координатам вычисляют дирекционные углы

$$\begin{aligned} \alpha_i^{бвч} &= \operatorname{arctg} \frac{Y_i - Y_A}{X_i - X_A}, & (i = 1, 2, 3), \\ \alpha_i^{бвч} &= \operatorname{arctg} \frac{Y_i - Y_B}{X_i - X_B}, & (i = 4, 5, 6), \end{aligned} \quad (2.64)$$

и углы наклона

$$v_i^{6blч} = \arctg \frac{Z_i - Z_A}{\sqrt{(X_i - X_A)^2 + (Y_i - Y_A)^2}}, \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$v_i^{6blч} = \arctg \frac{Z_i - Z_B}{\sqrt{(X_i - X_B)^2 + (Y_i - Y_B)^2}}, \quad (i = 4, 5, 6),$$
(2.65)

Затем находим разности для горизонтальных направлений

$$v_i^\alpha = \alpha_i^{6blч} - N_i^A - \vartheta_A, \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$v_i^\alpha = \alpha_i^{6blч} - N_i^B - \vartheta_B, \quad (i = 4, 5, 6),$$
(2.66)

где N_i^A, N_i^B - измеренные горизонтальные направления со станций А и В на i -ую точку,

и для углов наклона

$$v_i^v = v_i^{6blч} - v_i^{uzM}, \quad (i = 1, \dots, 6),$$
(2.67)

где v_i^{uzM} - измеренные углы наклона на i -ую точку.

И, наконец, находим переменные путём подбора на компьютере под условием равенства нулю всех разностей

$$v_i^\alpha = v_i^v = 0.$$
(2.68)

При решении задачи подбираются 12 переменных для одной балки:

$$X_1, Y_1, Z_1, \underline{l_2}, l_3, l_4, \underline{l_5}, l_6, \alpha_{бал}, v_{бал}, \underline{\Delta y}, \underline{\Delta z}.$$
(2.69)

Для сокращения итераций полезно разделить эту задачу на две независимые задачи. Вначале подбираются 8 переменных, которые в строке (2.69) не подчеркнуты. Эти переменные, относятся к началу и концу балки. Затем подбираются остальные 4 переменные, относящиеся к середине балки. Все 12 переменных содержатся в формулах (2.66, 2.67), по которым затем вычисляются координаты точек. По ним составляются профили.

Для каждой балки свои 12 переменных. Они независимы от переменных других балок. Поэтому очередность обработки балок может быть любая.

Отличительной особенностью способа является большое число неизвестных и отсутствие избыточных измерений. На первый взгляд такой способ не приемлем для практического использования. Между тем, если нет грубых ошибок, всё обрабатывается без труда. Возможные ошибки будут видны на

профилях. Хотя каждая балка обрабатывается отдельно, на профилях должна быть видна непрерывная линия всех балок.

Применение способа вполне оправдывается, если используется достаточный уровень автоматизации измерений и их обработки. При измерениях отсчёты нужно записывать в запоминающее устройство прибора, копировать затем в компьютер и вставлять в готовую программу их обработки. Вероятность ошибок резко увеличивается, если запись отсчётов вести в журнал наблюдений под диктовку наблюдателя, а затем набирать их на клавиатуре компьютера.

Наблюдения выполняются при одном круге теодолита (тахеометра). Избыточные измерения при желании можно получить, сделав измерения при другом круге.

Съёмка нижнего пояса балок сильно упрощается, если мост не имеет продольного уклона и можно найти точку для станции, откуда углы наклона малы по величине и не превышают по модулю $1-2^\circ$. Если мост прямолинейный, то проблемой не является измерение расстояний до наблюдаемых точек с точностью до $0,1-0,2$ м. Для этого можно измерить одно-два расстояния до каких-либо точек линии балок, а остальные расстояния вычисляются с использованием измеренных горизонтальных углов.

Продифференцировав известную формулу по расстоянию s

$$h = s \cdot \sin \nu, \quad (2.70)$$

и перейдя к средним квадратическим ошибкам, получим ошибку определения превышения m_h в зависимости от ошибки определения горизонтального расстояния m_s

$$m_h = \sin \nu \cdot m_s. \quad (2.71)$$

Подставив сюда средние из указанных выше значений $\nu = 1,5^\circ$, $m_s = 0,15$ м получим $m_h = 4$ мм. Для вертикального профиля недоступной линии такая точность достаточна.

Между тем, при измерениях с одной станции можно получить только вертикальный профиль.

Для автомобильного моста на этапе его паспортизации имеет значение также и горизонтальный профиль линии балок. Если какая-либо опора моста сместится по течению реки, то это смещение будет зафиксировано на горизонтальном профиле. Если такое смещение есть и на другой стороне моста, то этот факт существенно повышает вероятность того, что это действительно смещение опоры.

Поэтому наблюдения линии балок с двух станций целесообразны ещё и с этих позиций.

Однако и здесь появляется задача независимого определения координат станции без наблюдений смежной станции (п.2.2.3), потому что с наблюдениями смежной станции связан немалый объём дополнительных работ.

Таким образом, выведены формулы обработки измерений итерациями при съёмке нижнего пояса балок автомобильного моста.

2.5.2 Обработка измерений по формулам пространственной геометрии

Рассмотрим последовательность решения данной задачи по формулам пространственной геометрии.

Через точку А и два измеренных луча (1 и 3) на начало и конец балки можно построить плоскость

$$Z = A_A X + B_A Y + C_A, \quad (2.72)$$

где индекс А указывает, что плоскость строится через точку А.

Для этого имеем 3 точки:

точка А с координатами

$$X = X_A, \quad Y = Y_A, \quad Z = Z_A; \quad (2.73)$$

точка на луче 1 на горизонтальном расстоянии d_1 от т. А с координатами

$$X = X_A + d_1 \cos \alpha_1, \quad Y = Y_A + d_1 \sin \alpha_1, \quad Z = Z_A + d_1 \operatorname{tg} \nu_1; \quad (2.74)$$

и точка на луче 3 на горизонтальном расстоянии d_3 от т. А с координатами

$$X = X_A + d_3 \cos \alpha_3, \quad Y = Y_A + d_3 \sin \alpha_3, \quad Z = Z_A + d_3 \operatorname{tg} \nu_3. \quad (2.75)$$

Подставив координаты точек в (2.72), получим 3 уравнения

$$\begin{aligned} Z_A &= A_A X_A + B_A Y_A + C_A; \\ Z_A + d_1 \operatorname{tg} \nu_1 &= A_A X_A + A_A d_1 \cos \alpha_1 + B_A Y_A + B_A d_1 \sin \alpha_1 + C_A; \\ Z_A + d_3 \operatorname{tg} \nu_3 &= A_A X_A + A_A d_3 \cos \alpha_3 + B_A Y_A + B_A d_3 \sin \alpha_3 + C_A. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Вычтя 1-е уравнение из 2-го, затем из 3-го, будем иметь

$$\begin{aligned} d_1 \operatorname{tg} \nu_1 &= A_A d_1 \cos \alpha_1 + B_A d_1 \sin \alpha_1; \\ d_3 \operatorname{tg} \nu_3 &= A_A d_3 \cos \alpha_3 + B_A d_3 \sin \alpha_3; \end{aligned} \quad (2.77)$$

Разделив уравнения на пока неизвестные расстояния d_1 и d_3 получим 2 уравнения с двумя неизвестными

$$\begin{aligned} A_A \cos \alpha_1 + B_A \sin \alpha_1 &= \operatorname{tg} \nu_1; \\ A_A \cos \alpha_3 + B_A \sin \alpha_3 &= \operatorname{tg} \nu_3; \end{aligned} \quad (2.78)$$

Решив (2.78) и используя (2.72), получим для плоскости с т. А

$$\begin{aligned} A_A &= \frac{\operatorname{tg} \nu_3 \sin \alpha_1 - \operatorname{tg} \nu_1 \sin \alpha_3}{\sin(\alpha_1 - \alpha_3)}; \\ B_A &= \frac{\operatorname{tg} \nu_1 \cos \alpha_3 - \operatorname{tg} \nu_3 \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 - \alpha_3)}; \\ C_A &= Z_A - A_A X_A - B_A Y_A. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Для плоскости, проходящей через точку В и лучи 4 и 6, напомним аналогично

$$\begin{aligned} A_B &= \frac{\operatorname{tg} \nu_6 \sin \alpha_4 - \operatorname{tg} \nu_4 \sin \alpha_6}{\sin(\alpha_4 - \alpha_6)}; \\ B_B &= \frac{\operatorname{tg} \nu_4 \cos \alpha_6 - \operatorname{tg} \nu_6 \cos \alpha_4}{\sin(\alpha_4 - \alpha_6)}; \\ C_B &= z_B - A_B X_B - B_B Y_B. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Координаты точек 1, 3, 4 и 6 на балке найдём как точки пересечения соответствующих плоскостей и лучей. Поэтому, например, для точки 1 подставляем 3 уравнения (2.74) луча 1 в уравнение 2-й плоскости

$$Z = A_B X + B_B Y + C_B. \quad (2.81)$$

После преобразований получим расстояние d_1

$$d_1 = \frac{Z_A - A_B X_A - B_B Y_A - C_B}{A_B \cos \alpha_1 + B_B \sin \alpha_1 - \operatorname{tg} \nu_1}, \quad (2.82)$$

которое после подстановки в (2.74) даёт 3 координаты точки 1.

Для 3-х других точек формулы для расстояний имеют вид

$$d_3 = \frac{Z_A - A_B X_A - B_B Y_A - C_B}{A_B \cos \alpha_3 + B_B \sin \alpha_3 - \operatorname{tg} \nu_3};$$

$$d_4 = \frac{Z_B - A_A X_B - B_A Y_B - C_A}{A_A \cos \alpha_4 + B_A \sin \alpha_4 - \operatorname{tg} \nu_4}; \quad d_6 = \frac{Z_B - A_A X_B - B_A Y_B - C_A}{A_A \cos \alpha_6 + B_A \sin \alpha_6 - \operatorname{tg} \nu_6}. \quad (2.83)$$

Для нахождения точек 2 и 5 в середине балки найдём вначале направляющие векторы a_x , a_y и a_z в параметрическом уравнении прямой

$$X = X_0 + a_x p, \quad Y = Y_0 + a_y p, \quad Z = Z_0 + a_z p, \quad (2.84)$$

которая является линией пересечения двух плоскостей, построенных через точку А и точку В. Для этого подставив (2.84) в (2.72) и в (2.81)

$$Z_0 + a_z p = A_A X_0 + A_A a_x p + B_A Y_0 + B_A a_y p + C_A,$$

$$Z_0 + a_z p = A_B X_0 + A_B a_x p + B_B Y_0 + B_B a_y p + C_B, \quad (2.85)$$

и решив полученные уравнения, получим

$$a_x = B_A - B_B, \quad a_y = A_B - A_A, \quad a_z = A_B B_A - A_A B_B. \quad (2.86)$$

Далее нужно провести прямую, пересекающую лучи 2 и 5, и параллельную линии пересечения плоскостей. Для этого возьмём параметрические уравнения лучей 2 и 5 соответственно

$$X = X_A + \cos \alpha_2 d_2, \quad Y = Y_A + \sin \alpha_2 d_2, \quad Z = Z_A + \operatorname{tg} \nu_2 d_2,$$

$$X = X_B + \cos \alpha_5 d_5, \quad Y = Y_B + \sin \alpha_5 d_5, \quad Z = Z_B + \operatorname{tg} \nu_5 d_5. \quad (2.87)$$

Известно, что две линии в пространстве параллельны, если равны или взаимно пропорциональны их направляющие векторы. Поэтому приравняем разности координат двух точек (2.87) и правые части прямой (2.84) с учётом (2.86)

$$X_B - X_A + \cos \alpha_5 d_5 - \cos \alpha_2 d_2 = (B_A - B_B) p,$$

$$Y_B - Y_A + \sin \alpha_5 d_5 - \sin \alpha_2 d_2 = (A_B - A_A) p, \quad (2.88)$$

$$Z_B - Z_A + \operatorname{tg} \nu_5 d_5 - \operatorname{tg} \nu_2 d_2 = (A_B B_A - A_A B_B) p.$$

Решив уравнения относительно расстояний d_2 и d_5 , получим

$$d_2 = \frac{L_1 M_2 - L_2 M_1}{K_1 L_2 - K_2 L_1}, \quad d_5 = \frac{K_2 M_1 - K_1 M_2}{K_1 L_2 - K_2 L_1}, \quad (2.89)$$

где

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{\sin \alpha_2}{A_B - A_A} + \frac{\cos \alpha_2}{B_B - B_A}, & K_2 &= \frac{\sin \alpha_2}{A_B - A_A} + \frac{\operatorname{tg} \nu_2}{A_A B_B - A_B B_A}, \\ L_1 &= \frac{\sin \alpha_5}{A_A - A_B} + \frac{\cos \alpha_5}{B_A - B_B}, & L_2 &= \frac{\sin \alpha_5}{A_A - A_B} + \frac{\operatorname{tg} \nu_5}{A_B B_A - A_A B_B}, \\ M_1 &= \frac{X_B - X_A}{B_A - B_B} + \frac{Y_B - Y_A}{A_A - A_B}, & M_2 &= \frac{Y_B - Y_A}{A_A - A_B} + \frac{Z_B - Z_A}{A_B B_A - A_A B_B}. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Подставив d_2 и d_5 в (2.87), получим координаты последних двух точек.

При обработке измерений следует оценить возможные ошибки определения координат по углу между двумя плоскостями. В Справочнике [43] для уравнений 2-х плоскостей в виде

$$AX + BY + CZ + D = 0, \quad A'X + B'Y + C'Z + D' = 0 \quad (2.91)$$

приводится формула для нахождения угла γ между ними

$$\cos \gamma = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}. \quad (2.92)$$

Так как в формулах плоскостей (2.64) и (2.73) коэффициенты при координате Z равны -1 , поэтому для этих плоскостей получим

$$\cos \gamma = \frac{AA' + BB' + 1}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2 + 1}}. \quad (2.93)$$

Здесь тоже можно установить допуск в 30° на минимальное значение угла между плоскостями.

В задаче не приведены формулы нахождения координат точек A и B и дирекционных углов лучей. Эти вопросы рассмотрены выше в пункте 2.2.3.

В общем виде оценка точности по приведенным громоздким формулам (2.72-2.93) пространственной геометрии довольно сложна, ведь необходимо найти 216 частных производных в общем виде. Уместно в связи с этим оценить точность на основе численного дифференцирования [52]. Частные производные функции неизвестных по измеренным аргументам (величинам)

легко отыскиваются на листе Excel (рис. 3.18), на котором все ячейки увязаны между собой формулами (2.72-2.93). Для этого последовательно измеренные величины (D6:E11) увеличивались на 1", находились изменения вычисленных координат (J16:L21) и вычислялись производные размерностью мм/сек.дуги.

В результате получим матрицу f размером 18×12 , где 18 строк относятся к производным от функции 3-х координат 6-ти точек балки, а 12 столбцов – к измеренным элементам. Затем получим матрицу обратных весов неизвестных [52]

$$Q = fQ_{\beta}f^T, \quad (2.94)$$

где Q_{β} – матрица весов измерений.

Приняв для простоты 12 измерений горизонтальных и вертикальных углов независимыми между собой и имеющих одинаковую точность, получим вместо матрицы Q_{β} единичную матрицу и вместо (2.94) будем иметь

$$Q = ff^T. \quad (2.95)$$

Для точности измерений углов $\sigma_{\beta} = 5''$ получим средние квадратические ошибки (СКО) для всех неизвестных

$$\sigma_j = 5\sqrt{Q_j}. \quad (2.96)$$

Результаты вычислений приведены в табл. 2.5 для 2-х балок. Представляет интерес самая дальняя балка (балка 1). Для неё точность координаты X на порядок ниже точности координат Y и Z . Это объясняется тем, что для координаты X имеем острый угол засечки (см. рис. 2.17), а точность координат Y и Z определяется в основном углом между плоскостями (48°).

Табл. 2.5. Ср. кв. ошибки определения координат точек на балках

Обозначение координат	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	x_3	y_3	z_3	x_4	y_4	z_4	x_5	y_5	z_5	x_6	y_6	z_6
Балка 1, СКО, мм	18	4	3	15	4	3	12	4	2	53	4	2	43	4	2	33	3	2
Балка 5, СКО, мм	0,9	1,1	0,8	0,7	1,0	0,8	0,8	1,2	0,8	0,8	1,1	0,8	1,1	1,0	0,8	3,4	1,3	0,8

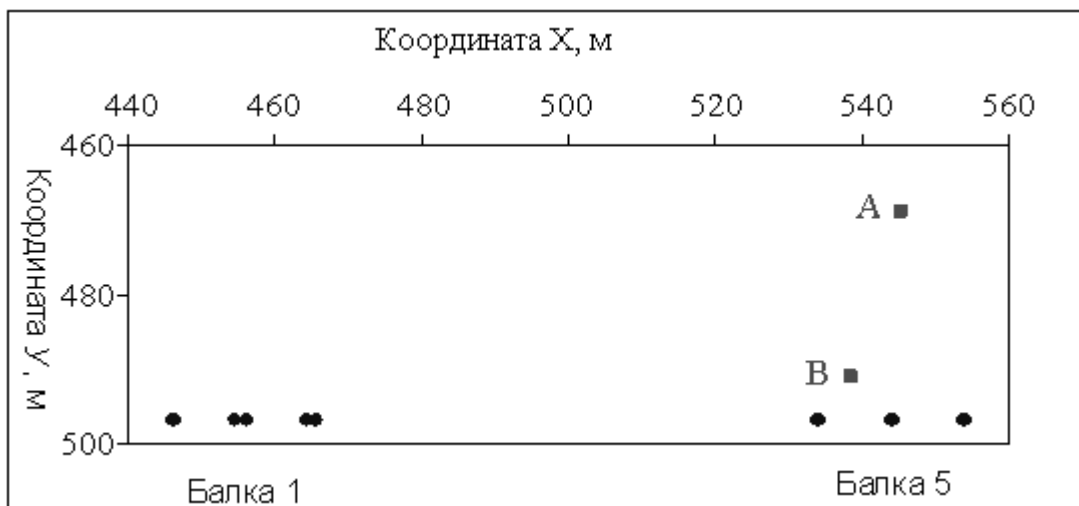


Рис. 2.17. Схема размещения точек

Таким образом, выведены формулы для обработки измерений недоступной линии нижнего пояса балок моста без измерения расстояний. Применение предлагаемого способа съёмки и обработки измерений итерациями или по формулам пространственной геометрии оправдано только в случае использования прибора с автоматической записью измерений в запоминающее устройство и программного обеспечения для обработки измерений.

2.6 Выводы по главе 2

Разработана новая методика определения деформаций деталей мостов, которая позволяет приводить различные по времени циклы измерений к единой системе координат без использования опорных реперов и без закрепления станций наблюдений на местности. Использование данной методики по-

зволяет повысить точность измерений за счет исключения промежуточного этапа – определения координат станций наблюдений от реперов. Кроме этого использование данной методики позволяет исключить основные погрешности: центрирования, редукции визирной цели, измерения высоты прибора и высоты визирования, приводящие к значительной потере точности.

Проведен анализ схемы измерения и оценка точности определения трех координат станции по измеренным углам (горизонтальным и вертикальным) на два опорных пункта. Предлагается в качестве избыточного измерения делать измерение расстояния до ближайшего опорного пункта.

Проведен анализ задачи Ганзена по определению плановых координат сразу двух точек по наблюдениям двух опорных пунктов. Использование программы анализа показало, что максимальной точности плановых координат двух станций соответствует условие, когда расстояния от станций до опорных пунктов в несколько раз короче расстояния между опорными пунктами.

Проведен анализ схемы независимых наблюдений с двух станций на две связующие (не опорные) точки для определения 3-х координат двух станций в единой системе условных координат. Данная схема не описана в литературе, тем не менее, она имеет значение для предлагаемых в диссертации методов съёмки нижнего пояса балок моста и совместного определения прогибов и изгибов балок моста.

Проведен анализ выгоднейших условий измерений для четырех различных схем определения координат марок с двух станций наблюдения. Сделаны выводы о возможности использования той или иной схемы в различных условиях наблюдений.

Разработан метод решения задачи определения прогибов недоступных балок моста с использованием теодолита (тахеометра) без измерения расстояний. Разработан метод решения задачи совместного определения прогибов и изгибов недоступных балок моста. На основе формул сферической тригонометрии выведены формулы прогибов и изгибов.

Разработана методика съёмки недоступного нижнего пояса линии балок моста путём измерения горизонтальных и вертикальных углов на точки балки с двух станций.

Выведены формулы обработки измерений итерациями при съёмке нижнего пояса балок автомобильного моста.

Выведены формулы обработки измерений по формулам пространственной геометрии при съёмке нижнего пояса балок автомобильного моста.

В общем виде оценка точности по приведенным громоздким формулам (2.72-2.93) пространственной геометрии довольно сложна, ведь необходимо найти 216 частных производных в общем виде. Поэтому на основе методики численного дифференцирования был разработан алгоритм и составлены компьютерные программы оценки точности предлагаемых методов измерений, снимающие проблему нахождения в общем виде большого количества частных производных функции неизвестных по измеренным аргументам.

Глава 3 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДОВ И ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ

3.1 Угловые засечки по двум опорным пунктам

Для проверки теоретических исследований, выполненных в п. 2.2.1, по определению координат точки обратной угловой засечкой по 2-м опорным пунктам, использованы материалы измерений на мостах для привязки электронного тахеометра при тахеометрической съёмке. Расстояния при этом не измерялись. При привязке снимались (записывались в запоминающее устройство) отсчёты по горизонтальному и вертикальному кругам при наведении крестом сетки нитей на 3-4 марки, закреплённые на опорах моста. Хотя координаты марок на мосту определялись для другой цели, их использование для привязки прибора позволяет составлять план моста, поперечные профили русла и прилегающей к руслу территории в единой для моста системе координат.

Следует отметить, что первоначально привязка прибора выполнялась другими разными способами и нередко отнимала немало времени. Разработанный метод обратной угловой засечки с одновременным уравниванием измеренных как горизонтальных, так и вертикальных углов оказался для мостов весьма удачным. Наблюдения отнимают не более 3-4 минут. Обработка выполняется на ПК строго по методу наименьших квадратов. При вычислении координат одновременно выводится и ориентирующий угол, позволяющий затем преобразовать отсчёты по ГК при тахеометрической съёмке в дирекционные углы.

Примечательно, что у выполненных за 7 лет более 400 таких привязок не было ни одного сбоя. Были ошибки, которые затем выявлялись, или в обозначениях наблюдаемых точек, или в промахах при наведения на точки. Так как для 3-х опорных точек имеем 2 избыточных измерения, а для 4-х точек - 4 избыточных измерения, можно без заметного снижения точности исключить из обработки одно-два измерения.

Заметим, что у современных тахеометров среди многих программ решения разных задач, указанной задачи автор диссертации не нашёл. Тем не менее, программное обеспечение тахеометров, например Trimble, Spectra, Nikon, даёт возможность решить эту задачу, хотя и не строго. Вначале нужно решить обратную засечку только по горизонтальным углам. Затем нужно вычислить высоту прибора по вычисленным расстояниям и измеренным вертикальным углам. При этом ясно, что если число опорных пунктов только 2, задача таким способом не решается.

На рисунке 3.1 представлена схема вычислений координат точки С по наблюдениям 4-х опорных точек 1 - 4. В ячейки С12:С15 скопированы с прибора зенитные расстояния (градусы и доли градуса) и в ячейки D12:D15 - отсчёты по горизонтальному кругу. Наблюдения велись только при КЛ. В матрицу E12:G15 скопированы координаты марок. В ячейках H12:H15 и I12:I15 углы перевычислены в радианы. При этом зенитные расстояния преобразованы в углы наклона. В ячейках J12:J15 приведены вычисленные углы наклона по формулам

$$v_i = \arctg \frac{Z_i - Z_c}{(\sqrt{(X_i - X_c)^2 + (Y_i - Y_c)^2})} \quad (3.1)$$

где индекс i относится к текущей опорной точке; индекс c - к координатам определяемой точки С.

В ячейках K12:K15 приведены вычисленные дирекционные углы

$$\alpha_i = \arctg \frac{Y_i - Y_c}{X_i - X_c}, \quad (3.2)$$

с известными условиями, зависящими от знаков приращений координат. Чтобы компьютер не выдал ошибку в случае, когда знаменатель (3.2) равен нулю, в программе написано:

$$\begin{aligned} &\text{если } X_i - X_c = 0 \text{ и } Y_i - Y_c > 0, \text{ то } \alpha_i = \pi / 2; \\ &\text{если } X_i - X_c = 0 \text{ и } Y_i - Y_c < 0, \text{ то } \alpha_i = 3\pi / 4; \\ &\text{если } X_i - X_c = 0 \text{ и } Y_i - Y_c = 0, \text{ то } \alpha_i = 0; \end{aligned} \quad (3.3)$$

Горизонтальные расстояния (L12:L15), вычисленные по формуле

$$d_i = \sqrt{(X_i - X_c)^2 + (Y_i - Y_c)^2}, \quad (3.4)$$

в обработке не участвуют и служат для ориентировочной оценки геометрии засечки.

В вычисленных ориентирующих углах

$$\vartheta_i = \alpha_i - M_i,$$

где M_i - отсчёт по горизонтальному кругу, введено важное условие. Если угол ϑ_i отличается от угла ϑ_j для 1-й строки (M12) более чем на угол π , то к ϑ_i прибавляется или от него вычитается угол 2π . Если условие не ввести, то в случае значительного расхождения предварительных координат определяемой точки от точных координат, компьютер иногда находит решение совсем не там, где нужно, и 4 ориентирующих угла сильно отличаются между собой.

В ячейках N12:N15 вычислены отклонения углов ϑ_j от их среднего (M17), а в ячейках O12:O15 - разности измеренных и вычисленных углов наклона.

В целевой ячейке O17 вычисляется сумма квадратов 8-ми отклонений по горизонтальным и вертикальным углам (матрица N12:O15).

Далее запускают программу нахождения минимума. Программа вычисляет значение в целевой ячейке многократно изменяя все 3 координаты (E11:G11) определяемой точки, до тех пор, пока не будет найдено в ней минимальное значение. Для контроля нужно убедиться, что остаточные отклонения соизмеримы с точностью измерения углов. На этом решение заканчивается.

Выполненные измерения по 4-м точкам использованы в диссертации для анализа точности вычисления координат по 2 опорным точкам. Для анализа использовались измерения на 2 точки во всех комбинациях из 4-х имеющихся. Число комбинаций по 2 из 4-х равно 6.

На рисунке 3.1 в ячейках D21:D26 приведены номера 2-х опорных точек из 4-х имеющихся, для которых вычислены координаты определяемой точки (матрица E21:G26) и расхождения этих координат (H21:J26) от координат, вычисленных по 4 опорным точкам (E28:G28). Вычисления выполнялись по

формулам (2.3), (2.4), (2.8)-(2.11). Для контроля формул некоторые вычисления выполнены подбором неизвестных на компьютере.

Для анализа выбраны самые длинные мосты, для которых длины сторон больше, чем на других мостах, и на которых делались измерения по 4-м опорным точкам. Хотя в целом по 4-м точкам геометрия засечек вполне удовлетворительная, геометрия многих засечек по 2-м точкам явно неудовлетворительная. Горизонтальные углы малы или близки к 180° . Разность зенитных расстояний тоже мала. Тем не менее, результаты вычислений оказываются значительно лучше, чем можно было предполагать.

Так для измерений, приведенных на рисунке 3.1, максимальные расхождения в координатах ($dX=28$ мм, $dY=-35$ мм) относятся к засечке по опорным пунктам 3 и 4, горизонтальный угол между которыми составляет $12,6^\circ$, а разность зенитных расстояний $2,1^\circ$. Для других комбинаций опорных точек горизонтальные углы больше, поэтому расхождения меньше.

На другом мосту (рис 3.2) максимальные расхождения (-89 и -16 мм) для засечки по точкам 4 и 5, горизонтальный угол между которыми $2,3^\circ$, а разность зенитных расстояний $0,7^\circ$. Эти углы весьма близки к схеме нерешаемой засечки. Однако расхождения в координатах не столь велики, учитывая длины сторон засечек 125 и 82 метра.

На этом же мосту для другой определяемой точки (рис 3.3) максимальное расхождение в координатах 18 мм, хотя тоже имеются крайне неблагоприятные комбинации опорных точек.

Максимальные из всех рассмотренных примеров расхождения координат имеют место для измерений, приведенных на рисунке 3.4 (283 и -116 мм). Для точек 1 и 2, расстояния до которых равны 144 и 105 м, горизонтальный угол равен $2,9^\circ$, а разность зенитных расстояний $0,3^\circ$. Здесь максимальное расхождение и в высоте определяемой точки ($dZ=-20$ мм).

Для другой точки (т. В) на этом же мосту максимальные расхождения (-28 и -29 мм) имеют место для максимально удалённых опорных точек (рас-

стояния 114 и 55 м), горизонтальный угол (17°) для которых минимален (рис. 3.5).

На рисунках 3.6 - 3.9 приведены примеры вычислений по опорным точкам, две из которых находятся недалеко друг от друга по сравнению с расстояниями между другими опорными точками. Как и следовало ожидать, максимальные расхождения имеют место для близкорасположенных между собой опорных точек. Между тем и здесь для 4-х засечек расхождения сравнительно невелики: от 21 до 47 мм.

Анализ результатов подтверждает сделанный в п 2.2 вывод о том, что в обратной пространственной засечке по 2-м точкам высоты определяются достаточно точно, даже в случае неблагоприятной геометрии засечки, когда ошибки плановых координат велики. Так из 54 засечек, приведенных на рисунках 3.1-3.9, максимальное расхождение в высоте составило 20 мм (рис. 3.4), затем 6 мм (рис. 3.1). Это на порядок меньше расхождений для плановых координат.

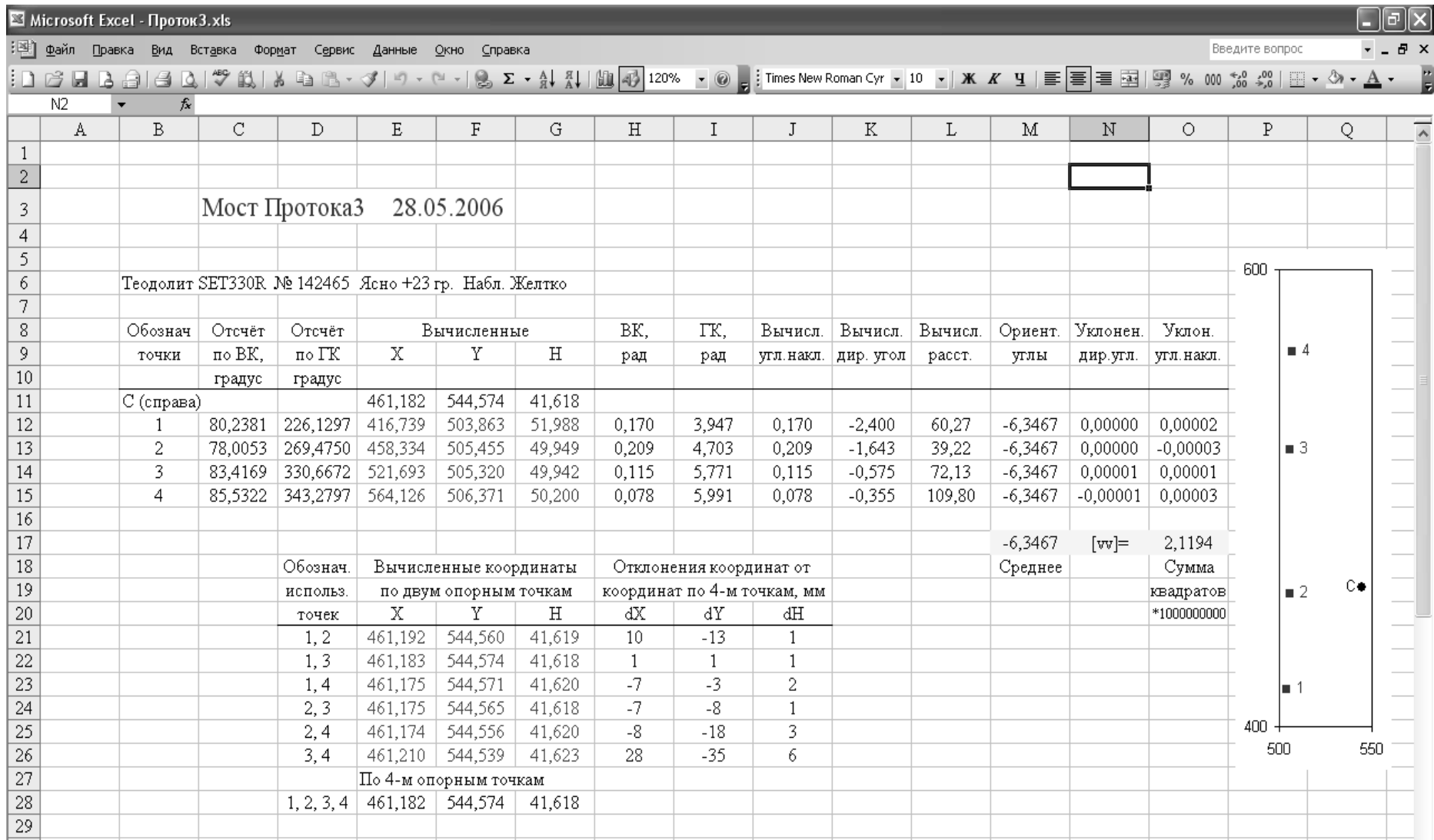


Рис. 3.1. Копия экрана вычислений угловых засечек с точки С



Рис. 3.2. Схема размещения точек и результаты вычислений на мосту (Ладожская)



Рис. 3.3. Схема размещения точек и результаты вычислений на мосту (Ладожская)



Рис. 3.4. Схема размещения точек и результаты вычислений на мосту (Протока)

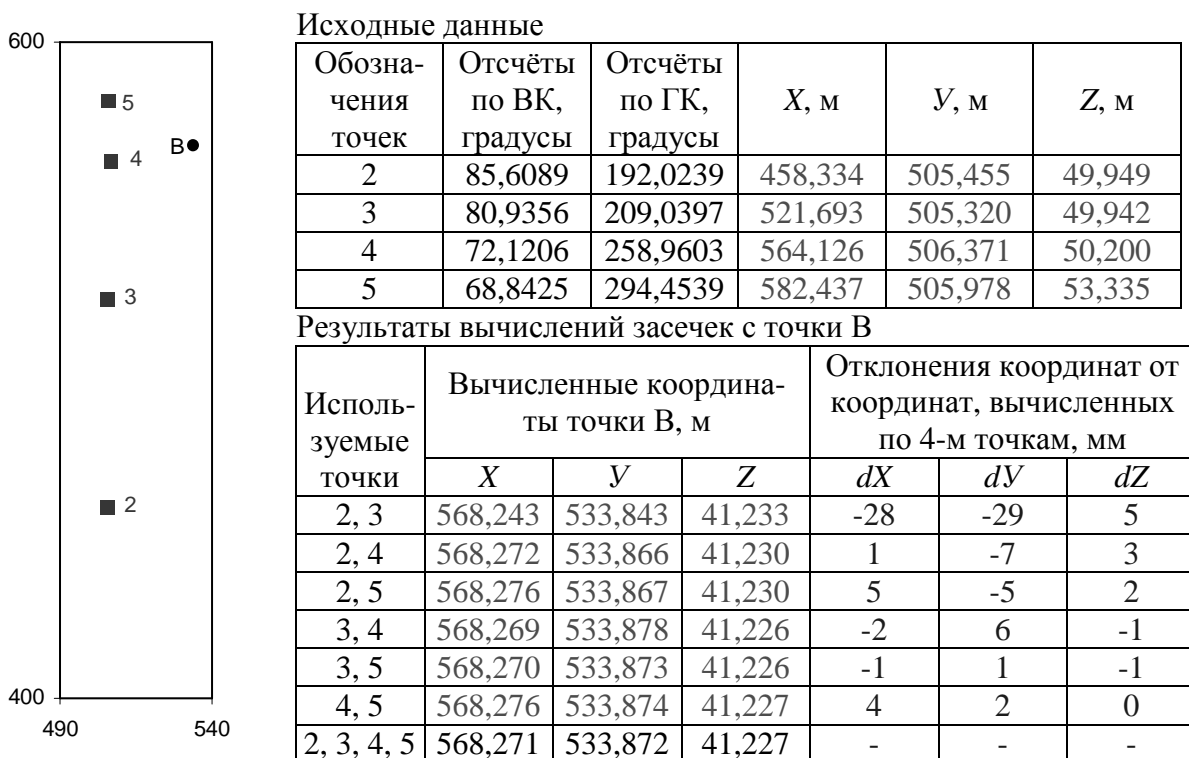


Рис. 3.5. Схема размещения точек и результаты вычислений на мосту (Протока)



Рис. 3.6. Схема размещения точек и результаты вычислений на мосту (Темрюк южн.)

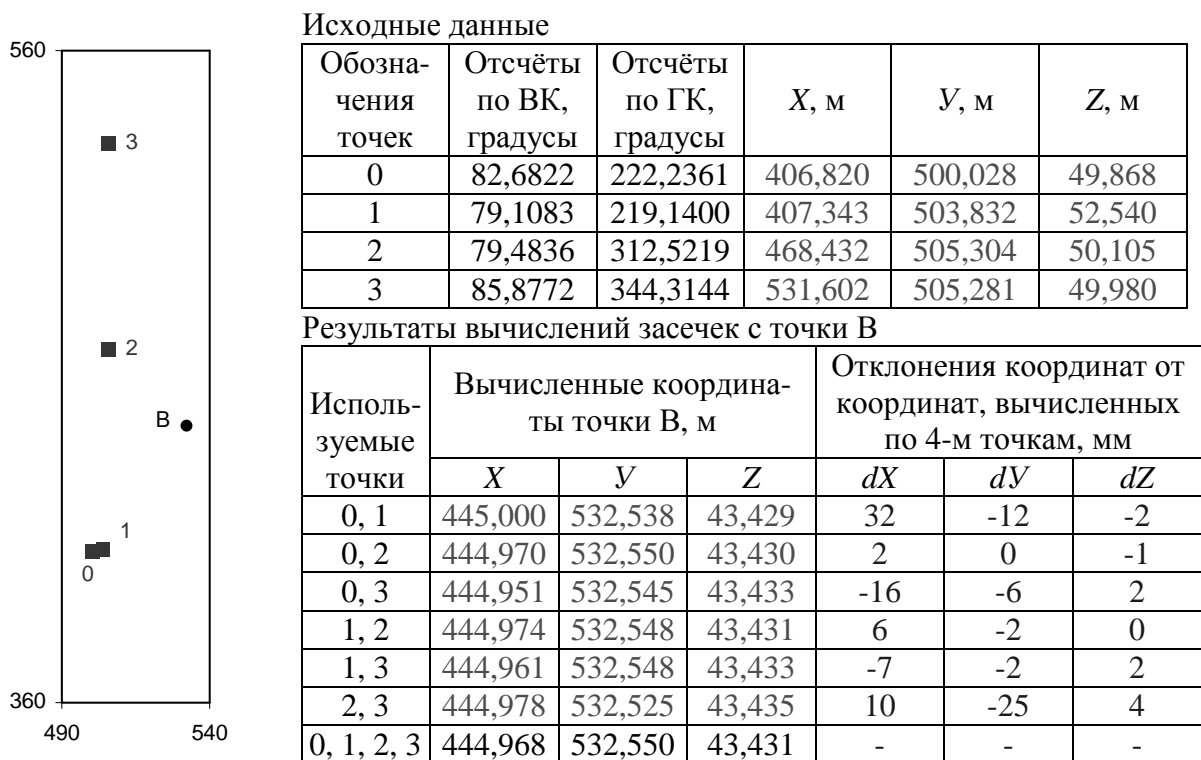


Рис. 3.7. Схема размещения точек и результаты вычислений на мосту (Темрюк южн.)

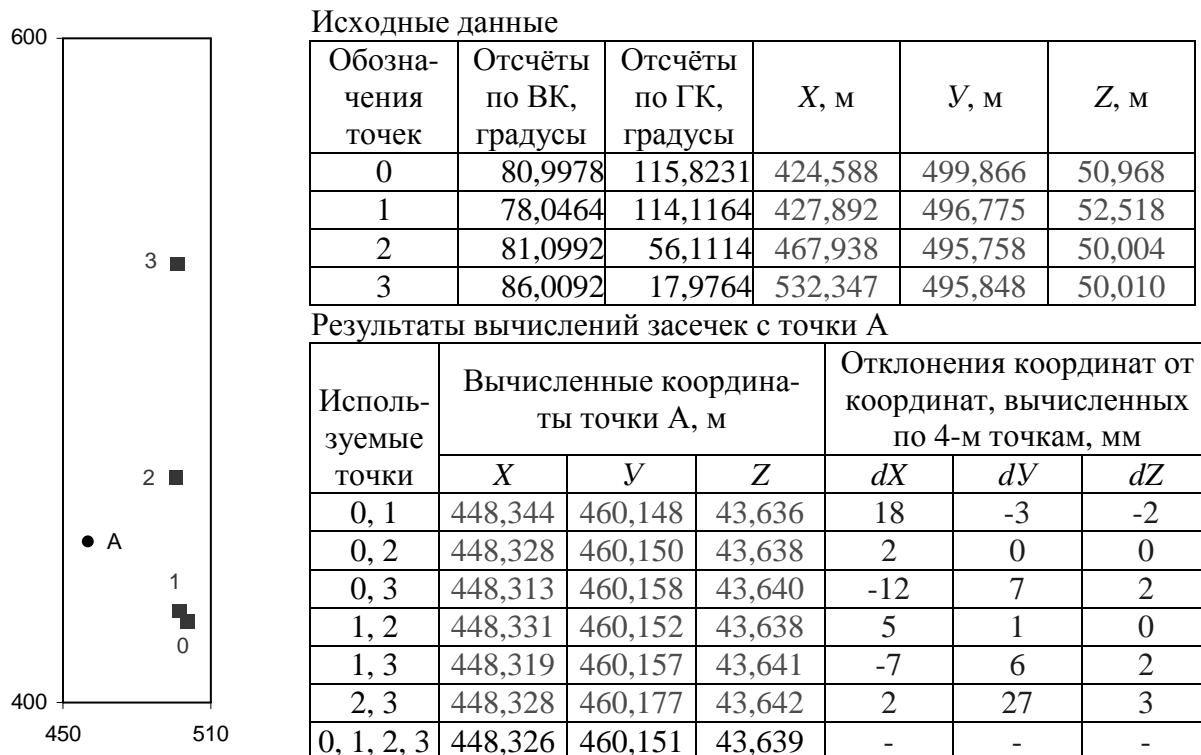


Рис. 3.8. Схема размещения точек и результаты вычислений на мосту (Троицкая)



Рис. 3.9. Схема размещения точек и результаты вычислений на мосту (Троицкая)

3.2. Совместное определение координат двух точек по двум опорным пунктам

Анализ задачи выполнен с построением эллипсов ошибок. Вычисления выполнены на листе MS Excel (рис. 3.10). Все эллипсы на рисунках 3.11 и 3.12 изображены в одинаковом масштабе. Для точности измерений углов 5" масштаб равен 1:3: в 1 см на рисунке 3 см на местности.

В таблицу координат (матрица D8:E11) вводятся координаты опорных пунктов 1 и 2 и координаты определяемых точек А и В. По приведенным выше формулам вычислены коэффициенты уравнений поправок (F16:K21) для 6-ти измерений: 3 - с точки А и 3 - с точки В. По ним найдена псевдообратная матрица (T26:I31) и обратная матрица (K27:P32). Первая составлялась для контроля: у псевдообратной матрицы суммы квадратов элементов по столбцам равны квадратичным элементам обратной матрицы. Ниже снова для контроля вычислена обратная матрица (K36:P41) через матрицу нормальных уравнений (D36:I41) [15]. Вычисления матриц выполнены с помощью составленных на отдельном модульном листе программ в редакторе Visual Basic.

Три элемента эллипса ошибок вычисляются в ячейках P20, P22, P23. Хотя формулы для параметров эллипса были выведены выше (2.25-.2.27), и подобные формулы имеются в справочнике [77], выполнялся контроль правильности вычисления эллипса следующим образом. Вся система координат вращалась путём ввода разных углов поворота в ячейку G12 до тех пор, пока 2 неквадратичных коэффициента (K28 и L27) в обратной матрице не станут равными нулю. Новые координаты вычислялись в матрице J8:K11, по которым точки размещались на рисунке справа и по координатам которых выполнялись дальнейшие вычисления. Известно, что если неквадратические коэффициенты равны нулю, корреляции между неизвестными X и Y нет и, следовательно, оси эллипса располагаются параллельно осям системы координат, а

длины полуосей легко вычисляются по двум квадратичным коэффициентам обратной матрицы.

Вращение системы координат позволило уточнить используемые формулы. В формуле азимута (2.17) следует учитывать знаки числителя и знаменателя подобно определению дирекционного угла в обратной геодезической задаче. Как и следовало ожидать, при вращении системы координат длины полуосей не меняются. Изменяется только азимут оси эллипса на тот же угол, на который развёрнута система.

На рисунках 3.11 показаны эллипсы ошибок для разных вариантов размещения двух определяемых точек относительно двух опорных пунктов, положение которых не меняется.

На рисунках "а", "б" и "в" видно, что размеры эллипса заметно увеличиваются (точность уменьшается) по мере удаления (увеличивается координата $У$) определяемых точек А и В от опорных пунктов 1 и 2. При этом сохраняется неизменной координата X и параллельность линий АВ и 1-2. На рисунке "в" имеем вариант размещения 4-х точек в вершинах квадрата, который показывает, что это далеко не лучшая геометрия засечек в задаче Ганзена, о чём упоминалось выше.

При уменьшении расстояния между точками А и В (рис. "г", "д" и "е") эллипсы вытягиваются и несколько меняют ориентировку. На следующих 3-х рисунках ("ж", "з", "и") два эллипса уже накладываются друг на друга, поэтому показан только один эллипс для точки А. Здесь они ещё более вытянуты вследствие уменьшения расстояния между определяемыми точками. Однако примечательно, что при уменьшении расстояния между определяемыми точками увеличивается только большая полуось (малая полуось на рисунках "а", "г", "ж" практически одинакова).

На рисунках "к" и "л" линия А-В перпендикулярна линии 1-2. Здесь видим, что две определяемые точки в одной задаче могут иметь существенно разную точность. Точность ниже у той точки, которая расположена дальше

от линии 1-2. Сохраняется и здесь отмеченная выше тенденция: точность обеих точек падает при уменьшении расстояния между ними.

При анализе данных задач выяснилось, что одна из осей эллипса уходит в бесконечность, если линия или продолжение линии А-В проходит через один из опорных пунктов. На рисунке "м" показан случай, когда продолжение линии ВА проходит недалеко от пункта 1: эллипсы сильно вытягиваются, хотя малая полуось имеет такую же длину, как и на рисунке "к".

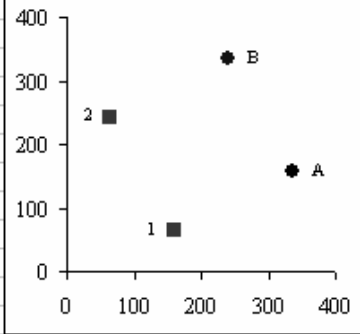
Для полноты исследования рассмотрены также варианты размещения точек А и В по разные стороны от линии 1-2. Для мостов такая задача не актуальна, потому что точки 1 и 2 - это марки на одной стороне моста, которые не видны с другой стороны моста.

Различные варианты размещения точек показаны на рисунках 3.12. Из рисунков "а", "б" и "в" видно, что минимум ошибок для точек А и В, если они находятся на одинаковых расстояниях от линии 1-2, приходится на фигуру, близкую к квадрату, образованному 4-мя этими точками. Однако точный расчёт показывает, что для минимума общей средней квадратической ошибки $m = \sqrt{a^2 + b^2}$ расстояние между точками А и В равно 128 метров (для квадрата оно равно 200 м), а для минимума только по оси a - расстояние 137 метров. Минимум по оси b соответствует совпадению точек А и В на линии 1-2; при этом ось a уходит в бесконечность.

Рисунки "г", "д" и "е" иллюстрируют, что задача Ганзена хорошо решается, если одна из двух определяемых точек находится на линии 1-2. Минимальную ошибку (и по a и по m) для точки А имеем, если АВ=100 м (рисунка нет). Здесь также имеем редкий случай в задаче Ганзена, когда эллипс ошибок становится окружностью (рис. "д"). При АВ= 245 м имеем равенство $a=b$.

На рисунках "ж", "з", "и" показаны засечки, у которых разность координат по оси X постоянная, а по оси Y изменяется. Здесь видим, что при уменьшении расстояний от точек А и В до пунктов 1 и 2 точность засечек увеличивается.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	
6			Исходные координаты точек						Координаты после поворота								
7			Обозн.	X, м	Y, м	дир. угол	расст		Обозн.	X, м	Y, м						
8			1	100,00	100,00	-2,36	141,42		1	64,65	159,02						
9			2	300,00	100,00	-0,79	141,42		2	240,98	64,65						
10			A	100,00	300,00	2,36	141,42		A	159,02	335,35						
11			B	300,00	300,00	0,79	141,42		B	335,35	240,98						
12			среднее	200,00	200,00	-0,49	поворот										
13																	
14		Точка	Точка	Дир. угол	Расст.	Исходная матрица уравнений поправок, рад/м											
15		стояния	визиров	градус	метры	xA	yA	xB	yB	Ориен1	Ориен2						
16		A	B	331,845	200,00	-0,0024	-0,0044	0,0024	0,0044	-1	0						
17		A	1	241,845	200,00	-0,0044	0,0024	0	0	-1	0						
18		A	2	286,845	282,84	-0,0034	-0,0010	0	0	-1	0						
19		B	A	151,845	200,00	-0,0024	-0,0044	0,0024	0,0044	0	-1						
20		B	1	196,845	282,84	0	0	-0,0010	0,0034	0	-1						
21		B	2	241,845	200,00	0	0	-0,0044	0,0024	0	-1						
22						0,0000420	0,0000455	0,0000316	0,0000559	3	3						
23																	
24		Точка	Точка	Псевдообратная матрица, м/рад													
25		стояния	визиров	xA	yA	xB	yB	ориент1	ориент2								
26		A	B	0	0	-82	271	0,00	1,00								
27		A	1	-353	189	-82	271	1,00	1,00								
28		A	2	353	-189	164	-541	-2,00	-2,00								
29		B	A	-271	-82	0	0	1,00	0,00								
30		B	1	541	164	353	-189	-2,00	-2,00								
31		B	2	-271	-82	-353	189	1,00	1,00								
32		Сумма квадратов		688444	111556	289060	510940										
33		Сумма по X и Y		800000		800000											
34																	
35				Нормальные уравнения (контроль)						Обратная матрица (контроль)							
36				0,0000420	0,0000139	-0,0000111	-0,0000208	0,0101515	0,0023593	688444	0	373128	-439692	-2682	-2412		
37				0,0000139	0,0000455	-0,0000208	-0,0000389	0,0030736	0,0044084	0	111556	40308	106872	74	156		
38				-0,0000111	-0,0000208	0,0000316	0,0000069	-0,0023593	0,0030736	373128	40308	289060	-266256	-1468	-1550		
39				-0,0000208	-0,0000389	0,0000069	0,0000559	-0,0044084	-0,0101515	-439692	106872	-266256	510940	1920	2190		
40				0,0101515	0,0030736	-0,0023593	-0,0044084	3,0000000	0,0000000	-2682	74	-1468	1920	11	10		
41				0,0023593	0,0044084	0,0030736	-0,0101515	0,0000000	3,0000000	-2412	156	-1550	2190	10	11		
42																	



Для точки A	рад.	град.
угол эллипса, рад	0,0000	0,0
	(м/рад) ²	с.к.о, мм
большая ось	688444	20,7
малая ось	111556	8,3
общ.ско	800000	22,4

Обратная матрица, м/рад ²					
688444	0	373128	-439692	-2682	-2412
0	111556	40308	106872	74	156
373128	40308	289060	-266256	-1468	-1550
-439692	106872	-266256	510940	1920	2190
-2682	74	-1468	1920	11	10
-2412	156	-1550	2190	10	11

Обратная матрица (контроль)					
688444	0	373128	-439692	-2682	-2412
0	111556	40308	106872	74	156
373128	40308	289060	-266256	-1468	-1550
-439692	106872	-266256	510940	1920	2190
-2682	74	-1468	1920	11	10
-2412	156	-1550	2190	10	11

Рис. 3.10. Копия листа MS Excel оценки точности задачи Ганзена

Измерены горизонтальные углы на точках А и В. Точки 1 и 2 - опорные

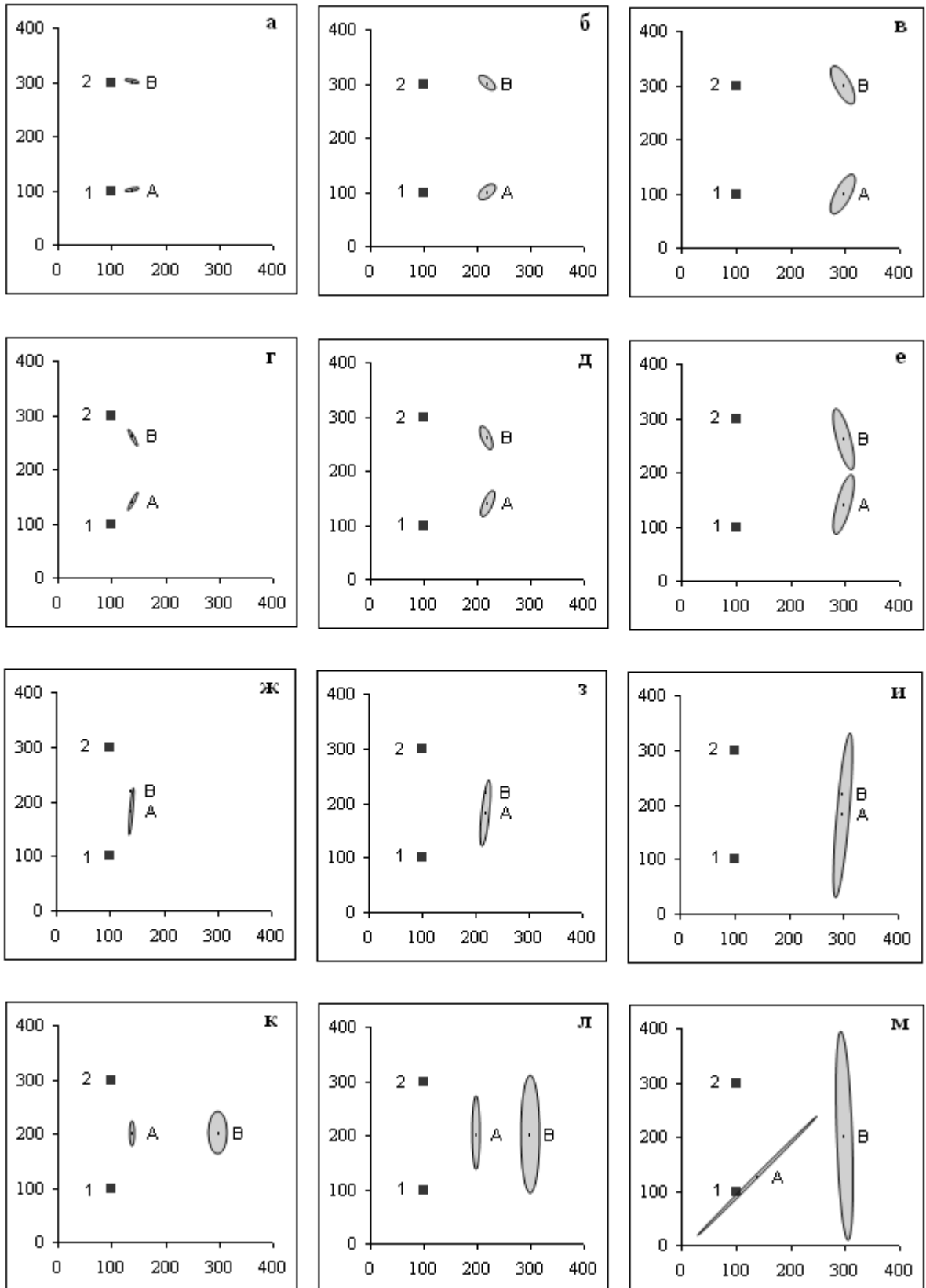


Рис. 3.11. Эллипсы ошибок для задачи Ганзена

Измерены горизонтальные углы на точках А и В. Точки 1 и 2 - опорные

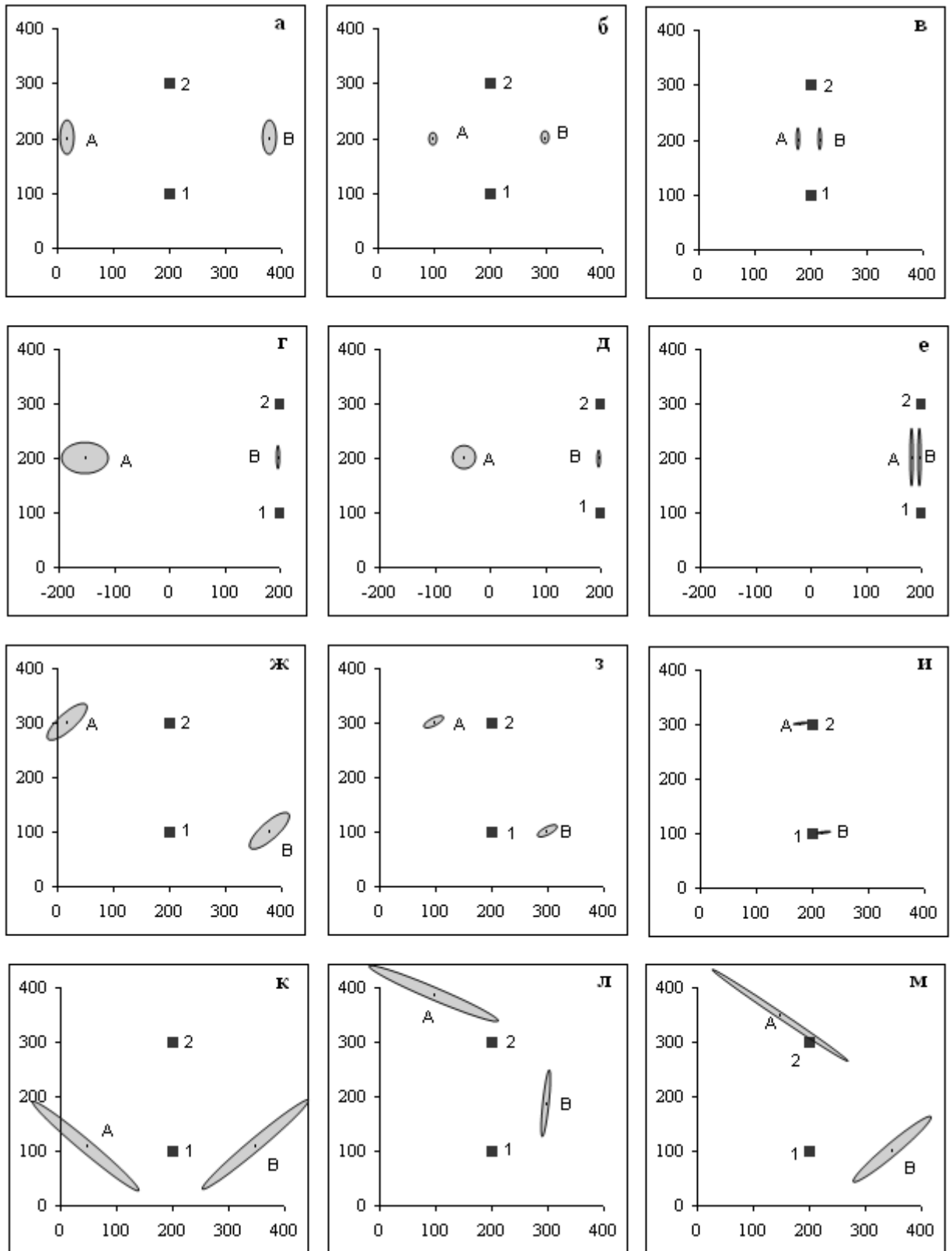


Рис. 3.12. Эллипсы ошибок для задачи Ганзена

Измерены горизонтальные углы на точках А и В. Пункты 1 и 2 - опорные

На рисунках "к", "л", "м" показаны случаи, когда линия АВ проходит вблизи одной из опорных точек. Здесь также, как и в случае расположения точек А и В по одну сторону от линии 1-2 (рис. 3.11), большая полуось уходит в бесконечность, если линия АВ пересекает один из опорных пунктов.

3.3. Анализ точности определения координат марок

Анализ выполнен для схемы измерений на мосту, у которого на одной стороне моста размещено 4 марки. Две крайние марки 1 и 4 (рис 2.10) условно считаются опорными. Марки 2 и 3 - определяемые. С точек А и В измерены горизонтальные и вертикальные углы на все марки в том числе и по линии АВ (назовём такие измерения схемой 1). Высоты всех точек были приняты одинаковыми, поэтому хотя совместно с горизонтальными уравнивались и вертикальные углы, последние не оказывали влияния на точность плановых координат.

Для анализа составлен модульный лист, ячейки которого связаны цепочкой формул таким образом, что при изменении координат станций А и В автоматически вычисляются параметры эллипсов ошибок для точек 2 и 3. Эллипсы на рисунках 3.13-3.16 построены в масштабе 1:1. Это в 3 раза более крупный масштаб по сравнению с масштабом на рисунках 3.11 и 3.12. Иначе эллипсы были бы слишком мелкими. Дополнительно для каждого рисунка указаны величины полуосей a и b эллипсов для плановых координат и средние квадратические ошибки mH определения высоты.

На рисунках "г", "д" и "е" (рис. 3.13) показаны эллипсы для наиболее выгодного размещения станций А и В с целью максимальной точности конечного результата. На рисунке "г" имеем минимум общей средней квадратической ошибки, на рисунке "д" - минимум по большой оси и на рисунке "е" - минимум по малой оси эллипса. При поиске минимума изменялись координаты только станции А: X_A , Y_A . Для станции В координаты вычислялись по

формулам $X_B = 400 - X_A$; $Y_B = Y_A$, которые обеспечивали симметрию схемы относительно линии $X=200$ м.

Характерно, что на всех трёх рисунках размеры эллипсов близки между собой, хотя размещение станций А и В заметно разное. Это положительное качество данного метода измерений: минимум ошибки в зависимости от положения станций наблюдений не критичен. Поэтому нет необходимости точно соблюдать выгоднейшие условия измерений, тем более, что вблизи русла реки далеко не всегда можно разместить станцию наблюдений в нужном месте. Иногда станцию выбирают не там, где нужно, а там, где можно.

На рисунках "а", "б", "в" линия АВ ближе к мосту. У вариантов "а" и "в" схемы засечек явно неблагоприятные, поэтому эллипсы вытягиваются вдоль оси X . На рисунках "ж", "з" линия АВ явно далеко от моста, но эллипсы увеличиваются не столь заметно. Это ещё раз свидетельствует о том, что минимум эллипсов достаточно пологий в районе выгоднейших условий измерений.

На рисунке "и" показан случай, когда продолжение линии АВ проходит вблизи точки 4. Если бы линия АВ проходила точно через точку 4 эллипс ушёл бы в бесконечность, как и в задаче Ганзена. Неприемлема также засечка, у которой продолжение линии АВ проходит вблизи любой из 4-х марок на мосту.

Следует отметить, что средняя квадратическая ошибка mH определения высоты заметно меньше полуосей a и b . В среднем она меньше малой полуоси в 2-3 раза.

На рисунках 3.14 показаны результаты оценки точности для точки 2 для измерений с точек А и В только на точки 1-4: без наблюдений по линии АВ (схема 2). Поэтому измерения на точках А и В независимы между собой. Все 9 рисунков построены при условии, что точки А и В находятся ниже точек 1-4 на 8 метров. Если этого превышения нет, задача не решается. Расчёт показывает, что размеры эллипсов, как и величина mH обратно пропорциональны превышению h линии марок над выбранными станциями А и В.

Сразу обращают на себя внимание существенно большие по размерам эллипсы. Раза в два больше и ошибки высот. На рисунках "а", "б" и "в" линия АВ параллельна линии 1-4 и находится на одинаковом удалении от неё. Из рисунков видно, что точность конечного результата изменяется мало при изменении расстояния АВ. На рисунках "г", "д" и "е" линия АВ удалена дальше от линии 1-4. Сразу заметно, как падает от этого точность. На рисунках "ж" и "з" продолжение линии АВ проходит через точки 1 или 4. Несмотря на это задача решается, чего нельзя сказать, как уже упоминалось, для схем измерений на рисунке 3.13. Задача решается и в случае прохождения продолжения линии АВ через определяемую точку (рис. "и"). Здесь также как и для схемы 1 ошибки mH в 2-3 раз меньше малой полуоси.

Рисунки 3.15 отражают точность измерений по схеме 3, в которой тоже нет измерений по линии АВ. Все точки находятся на одинаковой высоте ($h=0$). Взамен измеряется с каждой станции одно расстояние: с т. А до т. 1 и с т. В до т. 4. Здесь также измерения на точках А и В независимы между собой. Взаимная точность угловых и линейных измерений принята такой, как указано в п. 2.3.2: для углов $m_N = 5''$ и расстояний $m_s = 5$ мм. Поэтому коэффициенты уравнений поправок для длин линий умножались на коэффициент $k = 0,005 \text{ м}^{-1}$.

Анализ 9-ти рисунков показывает, что приемлема практически любая геометрия засечек, кроме явно неблагоприятных (рис. "а", "и"), что свидетельствует тоже о не критичности минимума ошибок. Более того, сравнивая рисунки с рисунками 3.13 для схемы 1, видим, что эллипсы здесь в среднем несколько меньше.

Отсюда видим преимущество схемы 3 с измерениями расстояний по сравнению со схемой 1, в которой дополнительно измеряется линия АВ. Преимущество ещё и в организации работ: схема с измерениями расстояний может быть реализована одним электронным тахеометром и одним исполнителем без закрепления на местности точек А и В.

Между тем, при работе двумя приборами и измерениями по линии АВ не составляет труда дополнительно измерить и расстояние до точки 1 или 4 (которая ближе), если, разумеется, измерения можно выполнять в безотражательном режиме. В этом случае будем иметь одно избыточное измерение и заметное повышение точности.

На рисунках 3.16 показана точность этой схемы (схема 4). На 9-ти рисунках расположение точек А и В такое же, как и на рисунках 3.15. Это даёт возможность сравнить схемы 3 и 4 между собой. Сравнение рисунков и особенно численных значений величин a и b показывает увеличение точности за счёт измерений по линии АВ, хотя и не столь значительное.

Для величины mH увеличения точности нет, потому что расчёты выполнены для одинаковых высот всех точек. В этом случае ошибки определения плановых координат практически не оказывают влияния на точность определения высот. И хотя в этих примерах расстояния, горизонтальные и вертикальные углы уравнивались совместно, высоты могут вычисляться отдельно: результат будет одинаковым.

Заметные превышения h для последней схемы (рисунков нет), когда все измерения нужно уравнивать совместно, точности практически не повышают. Расчёт показывает, что, например при $h = 8$ м, ошибки a и b уменьшаются на величины от 0,2 до 5%, но увеличиваются ошибки mH от 0,5 до 20%. При этом общая ошибка $m = \sqrt{a^2 + b^2 + mH^2}$ всегда уменьшается. Уменьшение составляет от 0,2 до 4%.

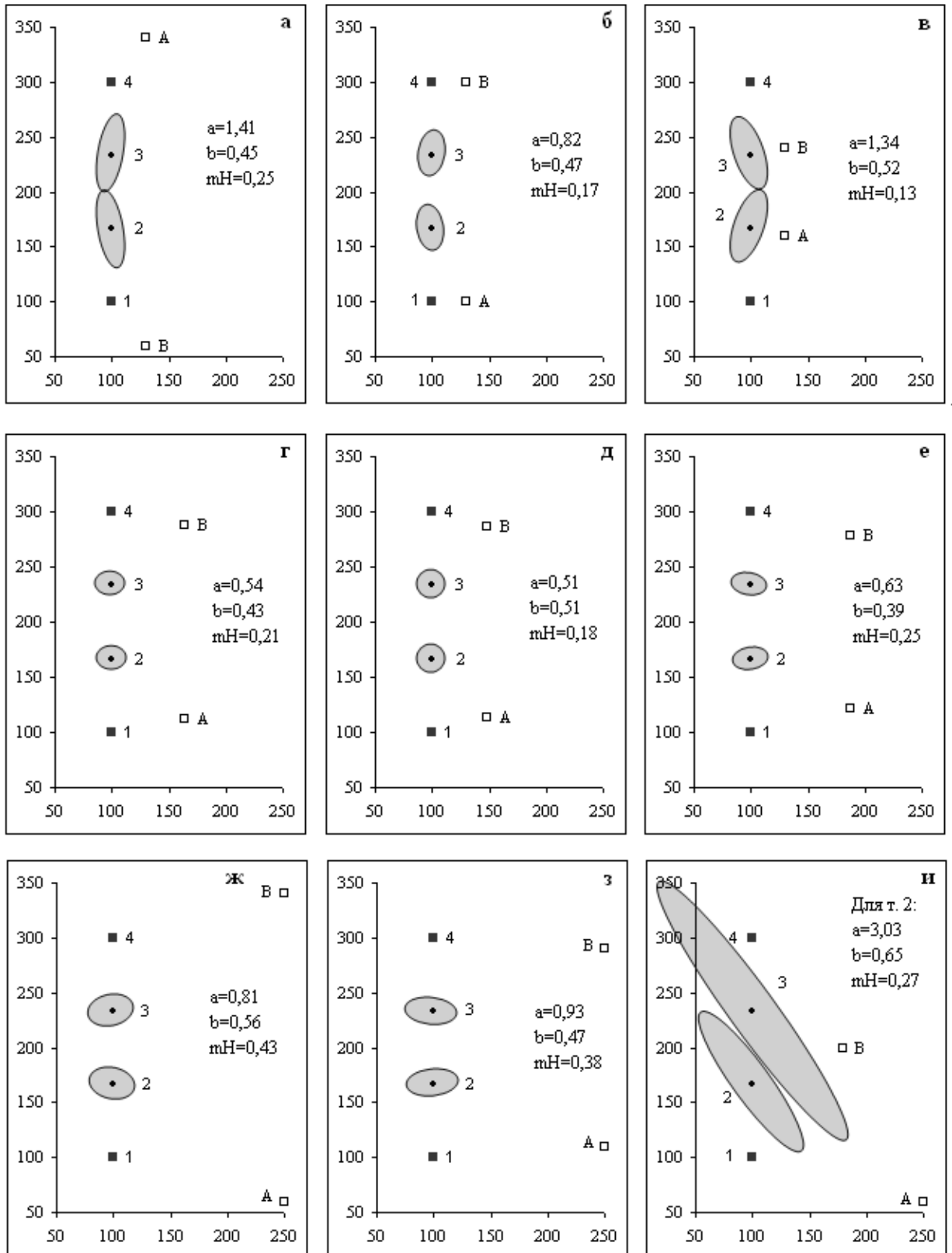


Рис. 3.13. Эллипсы ошибок для точек 2 и 3 в схеме 1

Измерены горизонтальные углы на точках А и В, в том числе и по линии АВ.
Точки 1 и 4 - опорные. Точки 2 и 3 - определяемые. Размеры указаны в сантиметрах

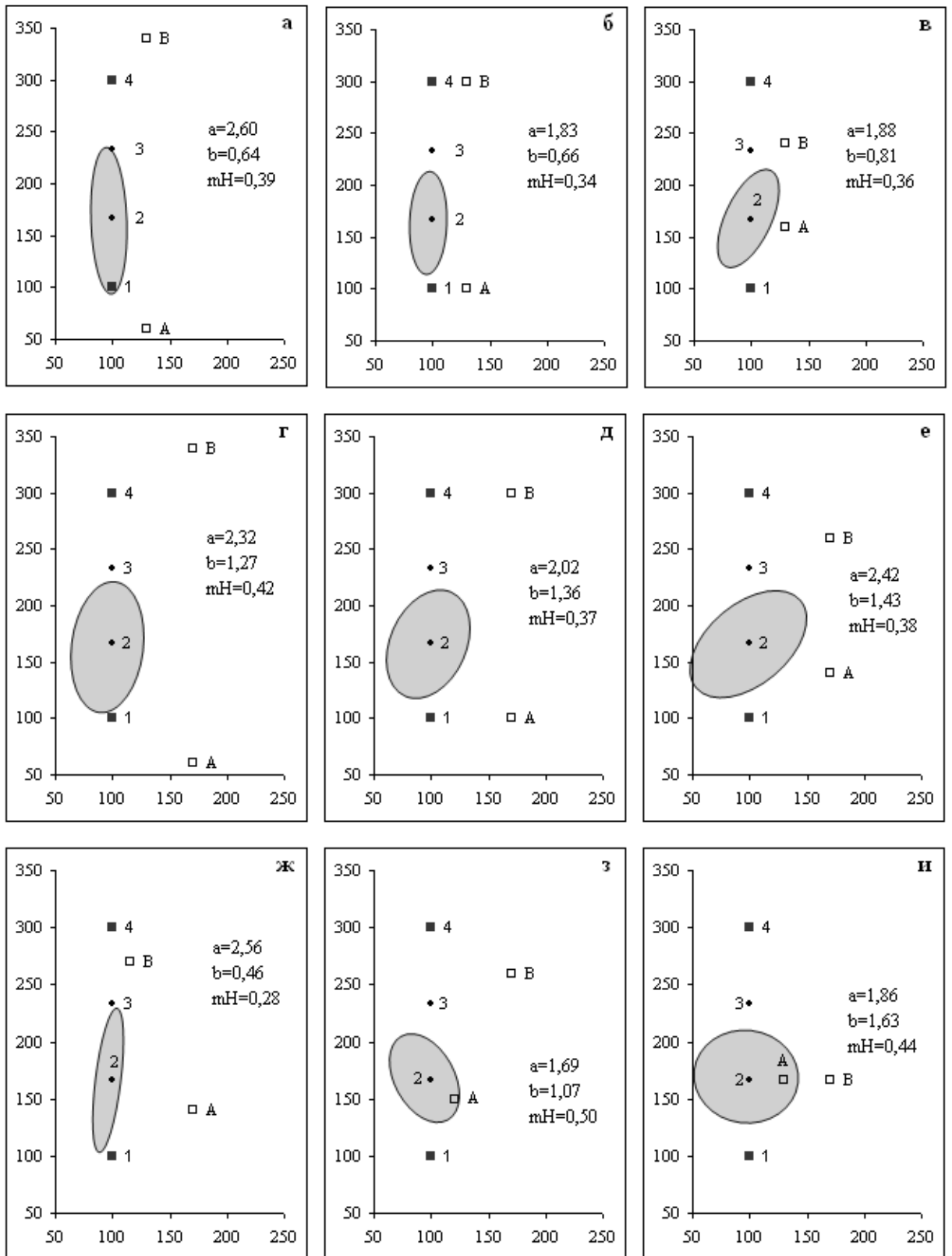


Рис. 3.14. Эллипсы ошибок для точки 2 в схеме 2

Измерены горизонтальные и вертикальные углы на точках А и В исключая линию АВ.
Точки 1 и 4 - опорные. Точки 2 и 3 - определяемые. Размеры указаны в сантиметрах

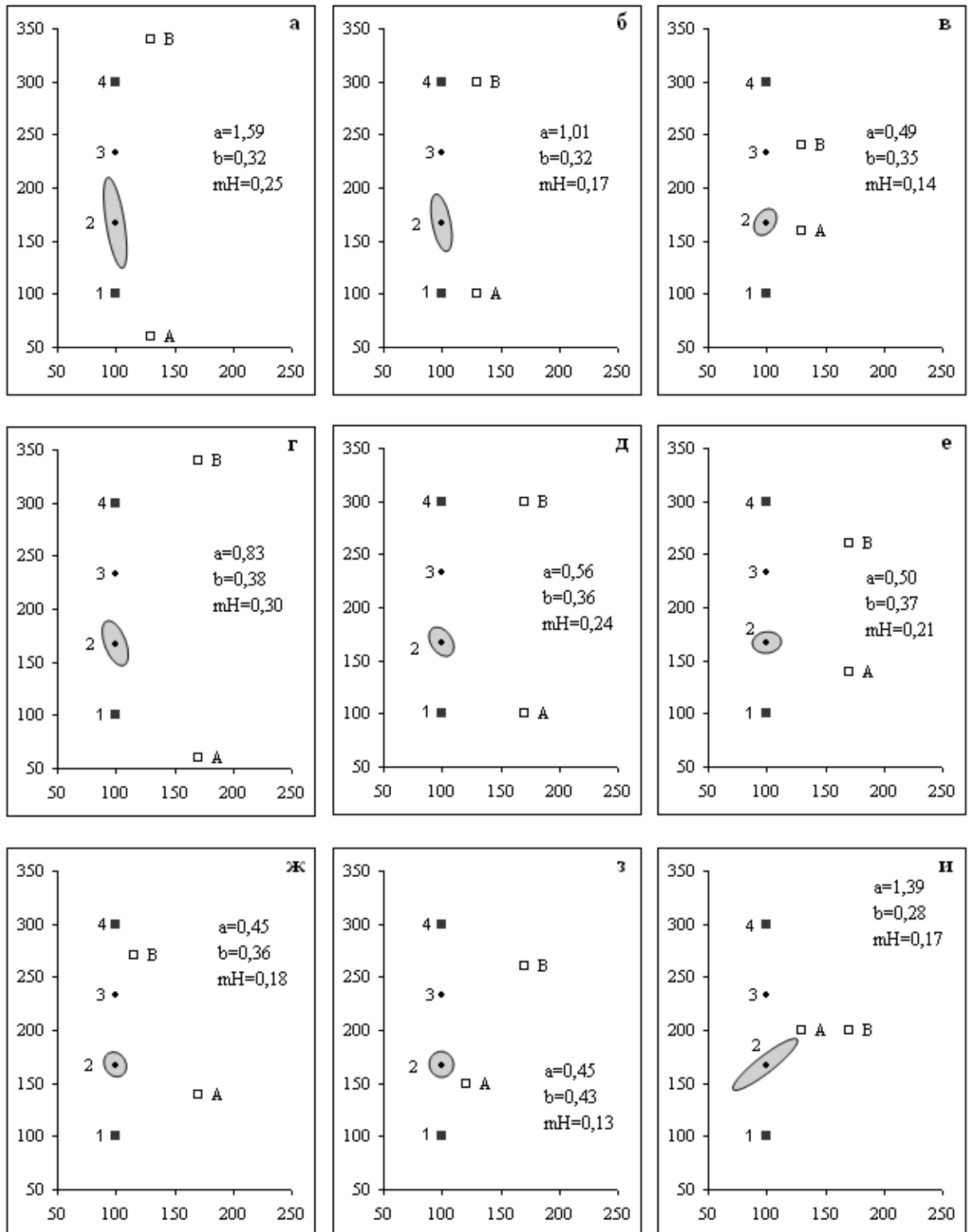


Рис. 3.15. Эллипсы ошибок для точки 2 в схеме 3

Измерены горизонтальные и вертикальные углы на точках А и В исключая линию АВ.
Измерены также расстояния с А до 1 и с В до 4.
Точки 1 и 4 - опорные. Точки 2 и 3 - определяемые. Размеры указаны в сантиметрах

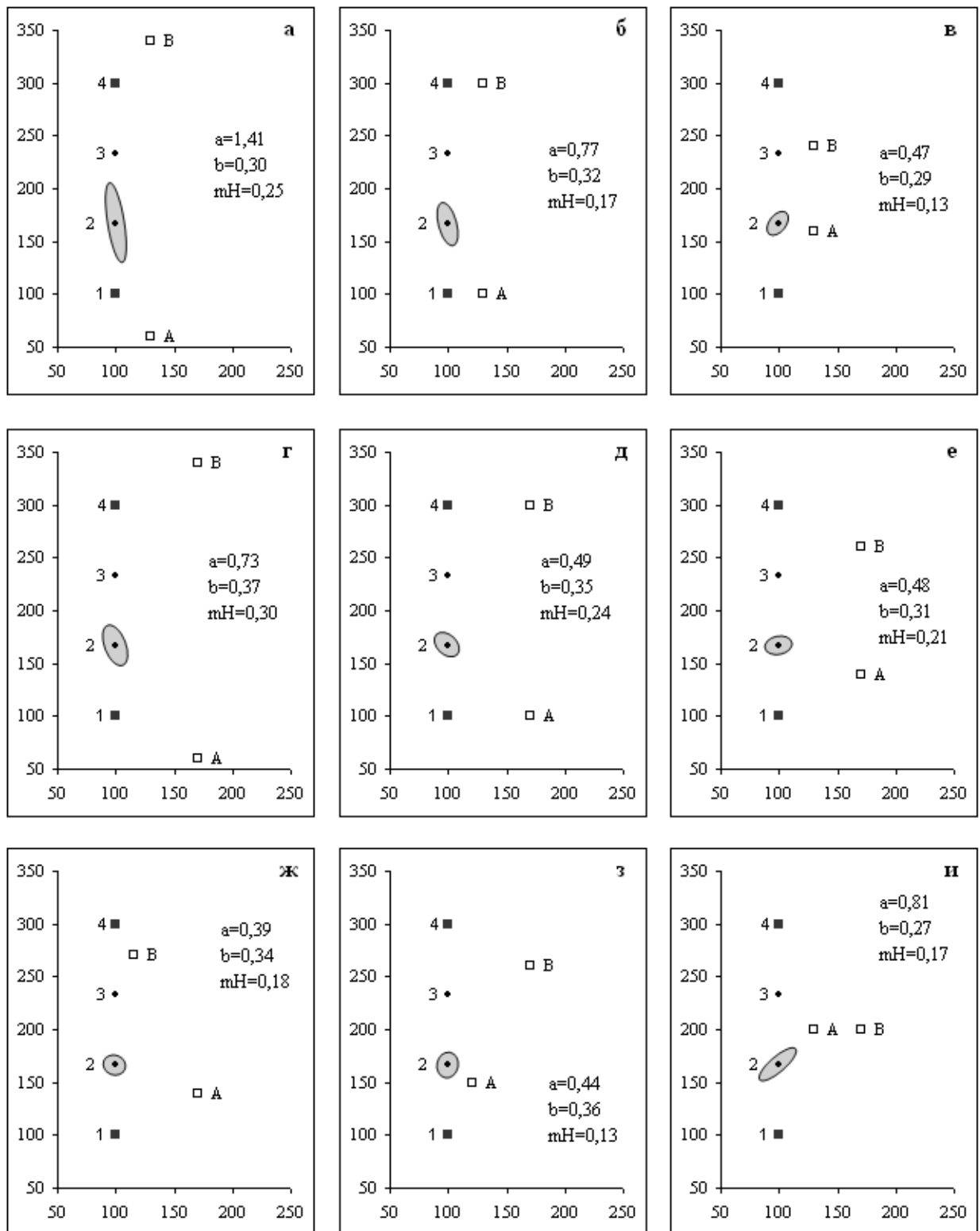


Рис. 3.16. Эллипсы ошибок для точки 2 в схеме 4

Измерены горизонтальные и вертикальные углы на точках А и В, включая линию АВ.
 Измерены также расстояния с А до 1 и с В до 4.
 Точки 1 и 4 - опорные. Точки 2 и 3 - определяемые. Размеры указаны в сантиметрах

Таким образом, расчёт и построение трёхмерного вектора ошибок для разных схем определения координат марок показывает разную точность для разных схем. У наиболее точной схемы измеряются горизонтальные и вертикальные углы с двух станций А и В на все марки в том числе и по линии АВ и измеряется одно расстояние до марки с каждой станции. Если исключить измерения по линии АВ точность падает незначительно, но организация работ существенно упрощается. Максимум точности приходится, когда длина линии АВ короче линии 1-4 между крайними марками на 20-30%, а расстояние между линиями в 2-3 раза короче длины линии 1-4.

3.4. Моделирование задачи определения прогибов и изгибов балок

Для проверки формул метода измерения с двух станций обеих составляющих (прогиба и изгиба) отклонения середины балки от линии, соединяющей начало и конец балки, выполнено математическое моделирование (рис. 3.17). В матрицу B8:D10 введены координаты 3-х точек: начала, середины и конца балки. Для середины балки в координаты U и H введены смещения Δu и Δh . На рисунке они равны соответственно +5 см и -3 см. Те же координаты копируются и для другой станции (B13:D15). Координаты станций 1 и 2 изменялись. Ввод координат можно выполнять или с клавиатуры, или перемещая крестом мыши положение станции на рисунке справа.

По координатам вычисляются дирекционные углы, углы наклона и расстояния от станции до точек балки (графы E-G). Эти элементы считаем измеренными значениями, по которым затем составляются и решаются два уравнения с неизвестными отклонениями Δu и Δh . Их значения вычисляются по проверяемым формулам 2.38-2.40 в ячейках E18 и F18. Эти значения, если формулы правильны, должны быть равны значениям Δu и Δh , введённым в координаты для середины балки. В примере они совпадают с точностью до 0,03 мм. Несовпадение обусловлено неучтёнными в формулах слагаемыми второго и высших порядков малости, что для метода вполне приемлемо.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Определение прогиба и изгиба середины балки с двух точек										
2	Две составляющие - прогиб и изгиб вычисляются										
3	из решения двух уравнений с двумя неизвестными										
4											
5		X, м	У, м	Н, м	Дир.угол,	Угол нак,	Расст.,				
6					рад	рад	м				
7	Станция1	5,3	35,1	23							
8	Начало	80	40	20	0,065502	-0,04005	74,861				
9	Середина	70	40,05	19,97	0,076358	-0,04666	64,889				
10	Конец	60	40	20	0,089341	-0,05457	54,919				
11											
12	Станция2	39,7	35,1	12							
13	Начало	80	40	20	0,120994	0,194567	40,597				
14	Середина	70	40,05	19,97	0,161936	0,253989	30,702				
15	Конец	60	40	20	0,236849	0,365841	20,883				
16											
17		a	b	l	Δy	Δh					
18	1	0,009415	0,015377	0,000009	0,04997	-0,02998					
19	2	-0,049803	0,030515	-0,003403							
20		Определитель		0,001053							
21	Угол между плоскост., град			89,981							

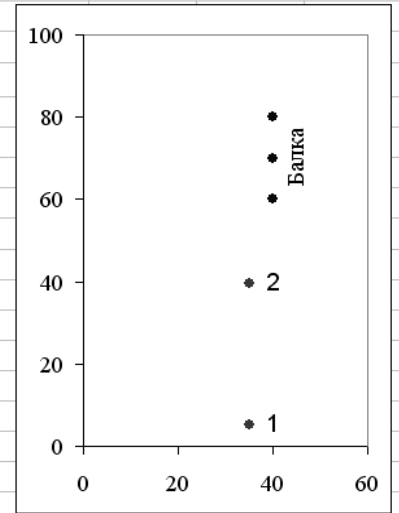


Рис. 3.17. Математическое моделирование метода определения прогиба и изгиба балки с двух станций

Совпадение результатов не нарушается при изменении исходных данных. Изменялись значения Δy и Δh в ячейках C9 и D9, высота конца балки (ячейка D10), что приводило к наклону балки, положение в плане и по высоте обеих станций. Совпадение было всегда, что подтверждает достоверность метода.

Полезно проверить на оптимальность схему измерений балки с двух точек. Для этого проанализируем обусловленность системы двух уравнений (матрица B18:D19). Кроме других известных способов выполним такой анализ. 1-е и 2-е уравнения матрицы можно рассматривать как уравнения прямых на плоскости. Угол γ между прямыми можно вычислить по формуле [50]

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_1 b_2}. \quad (3.5)$$

По этой формуле в ячейке D21 вычисляется угол γ . Очевидно, что обусловленность системы 2-х уравнений наилучшая, когда прямые пересекаются под прямым углом.

Пример на рисунке 3.17 окончательно распечатан так, чтобы угол γ был равен 90° . При этом как видно на плане размещения точек (рис. справа) схе-

ма измерений на первый взгляд, совершенно неприемлема. Более подробный анализ этого вопроса показал, что угол γ равен углу между двумя плоскостями, построенными через линию балок и данную станцию. В данном примере станция 1 находится выше линии балок на 3 метра, а станция 2 - ниже линии балок на 8 метров. Это превышение между станциями обеспечивает угол между плоскостями 90° .

Таким образом, математическим моделированием выполнены испытания более универсального метода, в котором определяются и прогибы (отклонения в вертикальной плоскости), и изгибы (отклонения в горизонтальной плоскости перпендикулярно оси моста) балки с двух станций. Моделирование показало пригодность метода для практики.

3.5. Обработка измерений съёмки нижнего пояса балок по формулам пространственной геометрии

На рисунке 3.18 приведен пример вычислений координат точек балки по формулам пространственной геометрии. Чтобы можно было сравнить между собой два способа вычислений, исходные данные в примере взяты те же, что для балки 1 на рисунке 4.6. В примере реализованы все формулы, выведенные в пункте 2.5.2. Большинство промежуточных вычислений не показано.

Вычисленные по измеренным горизонтальным и вертикальным углам (D6:E11) дирекционные углы и углы наклона (F6:G11) совместно с координатами двух станций (B15:D16) задают 6 лучей, 4 из которых используются для построения двух плоскостей (B20:D21). По коэффициентам плоскостей вычисляется угол между ними (F20). Для середины балки дополнительно составляются два уравнения (J6:L7). Вначале вычисляются горизонтальные расстояния (I16:I21) до соответствующих точек. Затем вычисляются координаты всех 6-ти точек. Вычисленные координаты (J16:L21) полностью совпали с координатами, вычисленными первым способом (рис. 4.6 матрица O27:Q32).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	2-й способ. Вычисления по формулам геометрии в пространстве. 23.08.2006											
2												
3	1. Копия измерений						4. Коэффициенты уравнений для середины балки					
4	Обозн.	Точка	Номер	ГК,	БК,	a,	n,					
5	станции	наблюд.	луча	град, м.с.	град, м.с.	рад	рад	Индекс	K	L	M	
6	A	начало	1	52,4654	88,1302	2,8688	0,0311	1	-94,862	22,028	7014,5	
7	A	середина	2	51,0948	87,5436	2,8405	0,0365	2	-92,545	18,751	7072,4	
8	A	конец	3	49,1357	87,3007	2,8068	0,0436					
9	B	начало	4	176,1811	86,5822	3,0815	0,0528					
10	B	середина	5	175,5610	86,3210	3,0751	0,0605					
11	B	конец	6	175,2407	85,5147	3,0657	0,0722					
12												
13	2. Координаты станций											
14	Обозн.	X, м	Y, м	Z, м	Ориен. уг.	5. Окончательные координаты						
15	A	545,105	468,970	47,045	1,9475	№ луча	d, м	X, м	Y, м	Z, м		
16	B	538,043	491,092	45,350	0,0044	1	102,697	446,207	496,643	50,242		
17						2	93,384	455,921	496,664	50,453		
18		3. Коэффициенты плоскостей			Угол между			3	84,403	465,387	496,702	50,728
19	Обозн.	A	B	C	плоскостями, град.			4	92,342	445,867	496,642	50,233
20	A	0,024704	0,20379	-61,994	48,2			5	83,721	454,507	496,659	50,418
21	B	0,021547	1,23778	-574,107				6	73,967	464,288	496,699	50,700

Рис. 3.18. Вычисления координат по формулам геометрии в пространстве

Таким образом, составленная программа обработки измерений по формулам пространственной геометрии даёт тождественный результат с результатами вычислениями другим способом – подбором неизвестных. Это свидетельствует не только о правильности выведенных формул, но и о правомочности применения того способа обработки, который лучше подходит. Применение первого или второго способа вычислений зависит от наличия избыточных измерений. Сложность обработки при использовании компьютера не является препятствием для применения методики на практике.

3.6 Выводы по главе 3

Математическое моделирование для подтверждения теоретических исследований по определению координат точки обратной угловой засечкой по 2-м опорным пунктам подтверждает сделанный в п 2.2 вывод о том, что в данной схеме измерений высоты определяются достаточно точно, даже в случае неблагоприятной геометрии засечки, когда ошибки плановых координат велики.

Расчёт и построение трёхмерного вектора ошибок для разных схем определения координат марок показывает разную точность для разных схем. У

наиболее точной схемы измеряются горизонтальные и вертикальные углы с двух станций А и В на все марки в том числе и по линии АВ и измеряется одно расстояние до марки с каждой станции. Если исключить измерения по линии АВ точность падает незначительно, но организация работ существенно упрощается. Максимум точности приходится, когда длина линии АВ короче линии 1-4 между крайними марками на 20-30%, а расстояние между линиями в 2-3 раза короче длины линии 1-4.

Также математическим моделированием было выполнено испытание метода, в котором определяются и прогибы (отклонения в вертикальной плоскости), и изгибы (отклонения в горизонтальной плоскости перпендикулярно оси моста) балки с двух станций и испытание методики исполнительной съёмки линии нижнего пояса недоступных балок моста. Моделирование показало правильность вывода формул и пригодность данных методик для практики.

ГЛАВА 4 АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

4.1 Обработка измерений по определению координат марок

В таблице (рис. 4.1) приведен пример обработки измерений, выполненных 3"- секундным электронным тахеометром SET330R. Для примера взят тот же мост, для которого ниже приведены экспериментальные измерения по определению прогибов и профилей линии балок. В отличие от более поздних наблюдений в данном примере наблюдения на мосту велись только одним прибором, поэтому все 4 конца двух базисов (точки T1, ...T4) закреплялись на местности, измерялась высота прибора и высота визирования (графа G). Наблюдения велись способом круговых приёмов. Начальным направлением всегда служил другой конец базиса, на котором устанавливалась веха с призмой и дополнительно измерялось расстояние. Наведения на марки выполнялись перекрестием сетки нитей.

Измеренные расстояния приведены в графе H. Над чертой указано среднее из 4-х измерений длин базиса с каждой точки.

В графах I - L приведены скопированные с прибора измерения горизонтальных (ГК) и вертикальных углов (ВК). У прибора SET330R отсчёты по кругам при их копировании выражены в градусах и долях градусов, поэтому преобразование их в радианы не составляет труда. Для контроля измерений вычислялись в секундах дуги коллимационная ошибка (графа O) и место нуля (графа P), а также их максимальные колебания на станции (графы Q и R).

Средние по двум кругам (графы M и N) копировались затем в таблицу вычисления координат (рис. 4.2).

Координаты X и Y вычислялись по формулам прямой угловой засечки, высота Z - по формулам тригонометрического нивелирования.

Так как от цикла к циклу положение базисов менялось, была разработана методика приведения измерений каждого цикла к единой системе координат. Для 2-х плановых координат это выполнялось путём подбора 4-х параметров:

координат X и Y точки Т1 (ячейки S6, T6), масштаба (S8) и дирекционного угла базиса (T8) таким образом, чтобы координаты X и Y двух крайних марок O1 и O6 стали равными координатам их в предыдущем цикле (должны быть равны нулю 4 разности в ячейках Y33, Z33, Y38 и Z38).

Совмещение по оси Z выполнялось путём подбора одного параметра - высоты (U6) точки Т1: должна быть равна нулю средняя разность (ячейки AA31 и AA38) высот марок Т1 и Т6.

Окончательным результатом являются разности полученных координат и координат марок в предыдущем цикле (матрица Y33:AA38). Хотя для опорных марок эти разности равны нулю, но если опорная марка получила смещение в очередном цикле, то оно будет выявлено по разностям для других марок. Поэтому приведенная методика обработки измерений в очередном цикле даёт равный объём информации о стабильности как опорных, так и всех других марок.

Программа вычислений на листе Microsoft Excel составлена так, что все ячейки связаны между собой соответствующими формулами. При копировании ячеек также сохраняется связь между ними: если изменяется значение в копируемой ячейке, то изменяется значение и в ячейке, куда копируют. Это существенно для достижения нужного уровня автоматизации вычислений. Для обработки новых измерений достаточно только вставить в таблицу (рис. 4.1) скопированные с прибора измерения, скопировать матрицу координат предыдущего цикла (V33:X38) и несколько раз запустить программу подбора данных в указанных ячейках для получения нужного результата в целевых ячейках.

В отдельных случаях, когда имеют место смещения или осадки марок, составляются графики, которые наглядно иллюстрируют изменения координат со временем. Так на рисунке 4.3 показан случай нестабильности двух из 14-ти опор моста длиной 300 метров через реку Уруп у н.п. Садовый Отраденского района.

Если на графике нужно оценить влияние неодинаковых интервалов времени между циклами измерений, то результаты измерений удобно представить так, как изображено на рисунке 4.3. Здесь в зависимости от даты измерений показаны смещения отдельно по оси U (штриховая линия) и по высоте H (сплошная линия).

Если смещения происходят по двум координатам одновременно, как в данном случае, более наглядны графики, представленные на рисунке 4.4. Здесь показаны перемещения марок в перпендикулярной оси моста плоскости. Именно такие перемещения часто имеют место для опор моста. При этом осадки опор с одной и другой стороны моста могут значительно различаться, вследствие одновременного наклона опоры в этой же плоскости.

Так для опоры №8 видно, что за 2 с небольшим года марка с правой стороны моста не только не опустилась, а поднялась на 12 мм. Марка с левой стороны моста опустилась за этот же период на 30 мм. Подобная картина, но в меньшей степени, проявилась и для соседней опоры № 9; справа марка опустилась на 14 мм, слева на 49 мм. По расстоянию между марками на одной опоре - 10,8 метров можно вычислить наклон опоры. Если ещё учесть смещение по оси U и размер по высоте всей опоры (высоту марок над основанием её фундамента), можно вычислить обе составляющие смещения опоры для основания фундамента.

Работы по укреплению опор моста начались сразу после 8 цикла, когда факт осадок и смещений был установлен достоверно. Укреплены 4 опоры (№№ 6, 7, 8 и 9). Дальнейшие измерения (до 12 цикла - май 2009 г.) не выявили смещений и осадок опор этого моста.

Таким образом, разработанная методика измерений при определении координат марок без измерения расстояний и использования реперов показала хорошие результаты и позволила своевременно выявить осадки опор на двух мостах.

Microsoft Excel - ТемрюкСев3.xls

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

Введите вопрос

Q74

	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
75					Тахеометр SET330R № 142465 19.05.2006. Малооблачно +18 гр. Набл. Желтко														
76																			
77					Обозн	Выс.инстр	Расст,	ВК,град	ГК,град	ВК,град	ГК,град	ГК,	ВК,	Контроль, секунды		Копебание, секунды			
78					точек	Выс.визир	м	КП	КП	КП	КП	рад	рад	кошим.	МО	кошим.	МО		
79					T1	1,371	93,511												
80					T2	1,594	93,507	89,1128	317,3531	270,8906	137,3522	5,5388	1,5553	-1,5	6,0	3,0	3,0		
81					O1		93,509	76,2392	64,5039	283,7653	244,5039	1,1258	1,3306	0,0	8,0				
82					O2		93,511	79,6808	15,4800	280,3231	195,4794	0,2702	1,3907	-1,0	7,0				
83					O3		93,517	84,2083	349,0822	275,7961	169,0819	6,0926	1,4697	-0,5	8,0				
84					O4			86,5386	339,8122	273,4658	139,8122	5,9308	1,5103	0,0	8,0				
85					O5			87,6375	335,4667	272,3653	155,4672	5,8550	1,5295	1,0	5,0				
86					O6			87,7114	333,3681	272,2931	133,3683	5,8184	1,5308	0,5	8,0				
87					T2			89,1136	317,3522	270,8903	137,3531	5,5388	1,5553	1,5	7,0				
88																			
89					T2	1,325	93,503												
90					T1	1,594	93,500	90,5878	16,0481	269,4167	196,0481	0,2801	1,5810	0,0	8,0	6,5	2,5		
91					O1		93,503	88,0058	5,5822	271,9989	185,5828	0,0974	1,5360	1,0	8,5				
92					O2		93,504	87,8992	2,3292	272,1067	182,3283	0,0406	1,5341	-1,5	10,5				
93					O3		93,505	87,1736	355,2647	272,8319	175,2656	6,2005	1,5214	1,5	10,0				
94					O4			86,4625	341,6592	273,5422	161,6597	5,9631	1,5090	1,0	8,5				
95					O5			85,5725	313,8347	274,4331	133,8350	5,4775	1,4935	0,5	10,0				
96					O6			84,1914	277,2708	275,8142	97,2717	4,8393	1,4694	1,5	10,0				
97					T1			90,5869	16,0478	269,4178	196,0506	0,2801	1,5810	5,0	8,5				
98																			
99					T3	1,377	82,404												
100					T4	1,594	82,403	88,6333	313,4661	271,3722	133,4669	5,4710	1,5469	1,5	10,0	3,5	5,5		
101					O1		82,402	86,3947	336,3239	273,6086	136,3250	5,8700	1,5078	2,0	6,0				
102					O2		82,403	85,8972	339,8617	274,1092	139,8631	5,9317	1,4991	2,5	11,5				
103					O3		82,409	84,1158	349,9892	275,8903	169,9911	6,1085	1,4680	3,5	11,0				
104					O4			80,8131	10,1617	279,1922	190,1619	0,1774	1,4104	0,5	9,5				
105					O5			80,1897	54,1361	279,8150	234,1367	0,9449	1,3995	1,0	8,5				
106					O6			81,4878	90,5572	278,5172	270,5578	1,5805	1,4222	1,0	9,0				
107					T4			88,6333	313,4669	271,3711	133,4669	5,4710	1,5469	0,0	8,0				
108																			
109					T4	1,366	82,392												
110					T3	1,594	82,395	91,0642	347,4919	268,9406	167,4922	6,0649	1,5893	0,5	8,5	4,0	4,5		
111					O1		82,395	83,6900	261,3792	276,3122	81,3792	4,5619	1,4606	0,0	4,0				
112					O2		82,387	84,9583	290,5692	275,0444	110,5694	5,0714	1,4828	0,5	5,0				
113					O3		82,391	86,4553	314,1486	273,5481	134,1472	5,4829	1,5089	-2,5	6,0				
114					O4			87,2717	325,5225	272,7322	145,5228	5,6814	1,5231	0,5	7,0				
115					O5			88,4492	332,2078	271,5542	132,2081	5,7981	1,5437	0,5	6,0				
116					O6			88,3822	335,8558	271,6214	155,8567	5,8618	1,5425	1,5	6,5				
117					T3			91,0642	347,4936	268,9389	167,4922	6,0649	1,5893	-2,5	5,5				
118																			

Рис. 4.1. Предварительная обработка измерений

3	Мост Темрюк Северный. 3 цикл. 19.05.2006																												
4																													
5																													
6																	X	Y	H	Расст	Зен.рас	i	v						
7																	T1	451,839	478,052	44,484	93,511	1,5553	1,371	1,594					
8																	T2	544,809	469,302	45,708	93,503	1,5810	1,325	1,594					
9																		0,99874	-0,0938	45,710	93,381								
10	Масшт. Дир. угол Конгр.																												
11	Для подбора координат нужно изменять ячейки, окрашенные голубым цветом																												
12																													
13																													
14	Обозн. точки	Отсч. по ПК, рад.	Зенитн. расст, рад.	Гориз. угол, рад	Дирекц. угол, рад	Гориз. расст, м	X1	Y1	H1	Обознач. точки	Отсч. по ПК, рад.	Зенитн. расст, рад.	Гориз. угол, рад	Дирекц. угол, рад	Гориз. расст, м	X1	Y1	H1	Окончательные координаты			Расхождения			Обозн. точки				
15	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	X	Y	H	dX	dY	dH					
16			i=									i=																	
17	T1		1,371		-0,0938	93,381	451,839	478,052	44,484	T2		1,325		3,04776	93,381	544,809	469,302	45,708											
18							544,809	469,302	45,708							451,839	478,052	44,484											
19		5,53885									0,2801																		
20	T2	5,53885	1,55528	0,00000						T1	0,28009	1,58102	-0,00001																
21	O1	1,12581	1,33059	-4,41304	-4,50688	19,144	447,932	496,793	50,544	O1	0,09743	1,53595	-0,18267	2,86509	100,702	447,932	496,793	50,544	447,932	496,793	50,544	0,000	0,000	0,000	O1				
22	O2	0,27017	1,39066	-5,26868	-5,36251	23,308	465,947	496,605	50,100	O2	0,04064	1,53408	-0,23946	2,80830	83,455	465,947	496,605	50,099	465,947	496,605	50,099	0,000	0,000	-0,001	O2				
23	O3	6,09263	1,46967	0,55378	0,45995	41,759	489,258	496,589	50,092	O3	6,20055	1,52142	5,92045	8,96820	61,891	489,258	496,589	50,092	489,258	496,589	50,092	0,000	0,000	-0,001	O3				
24	O4	5,93084	1,51034	0,39199	0,29816	62,997	512,056	496,558	49,668	O4	5,96308	1,50901	5,68298	8,73074	42,610	512,056	496,558	49,668	512,056	496,558	49,668	0,000	0,000	0,001	O4				
25	O5	5,85500	1,52954	0,31615	0,22232	83,805	533,581	496,530	49,315	O5	5,47745	1,49347	5,19735	8,24511	29,452	533,581	496,530	49,315	533,581	496,530	49,315	0,000	0,000	0,000	O5				
26	O6	5,81837	1,53081	0,27952	0,18569	101,657	551,749	496,820	49,922	O6	4,83930	1,46937	4,55920	7,60695	28,379	551,749	496,820	49,921	551,749	496,820	49,922	0,000	0,000	-0,001	O6				
27	T2	5,53885	1,55529	0,00000						T1	0,28011	1,58100	0,00001																
28																													
29																													
30																													
31																													
32																													
33																			Второй цикл 18.08.05			Разности: 3-й цикл минус 2-й							
34																			O1	447,932	496,793	50,545	0,000	0,000	-0,001				
35																			O2	465,951	496,603	50,102	-0,004	0,002	-0,003				
36																			O3	489,263	496,586	50,093	-0,005	0,002	-0,001				
37																			O4	512,059	496,556	49,669	-0,003	0,002	-0,001				
38																			O5	533,581	496,528	49,315	0,000	0,002	0,000				
39																			O6	551,749	496,820	49,921	0,000	0,000	0,001				
40																													
41																								0,0000	0,0000	0,0000			

Рис. 4.2. Окончательная обработка измерений

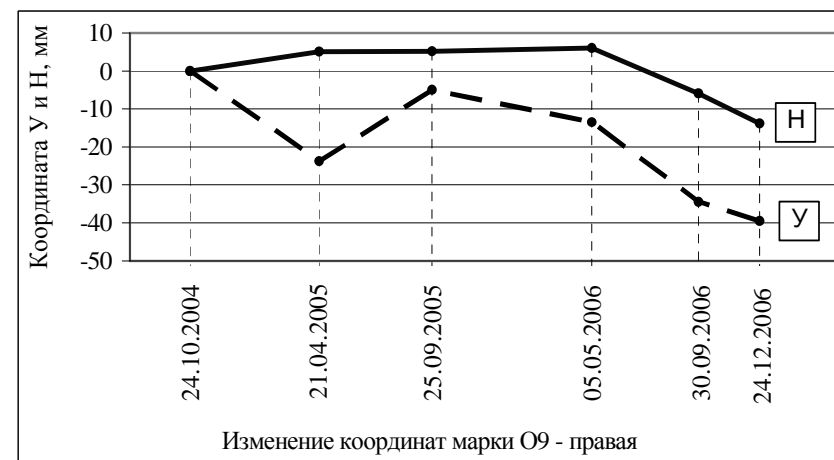
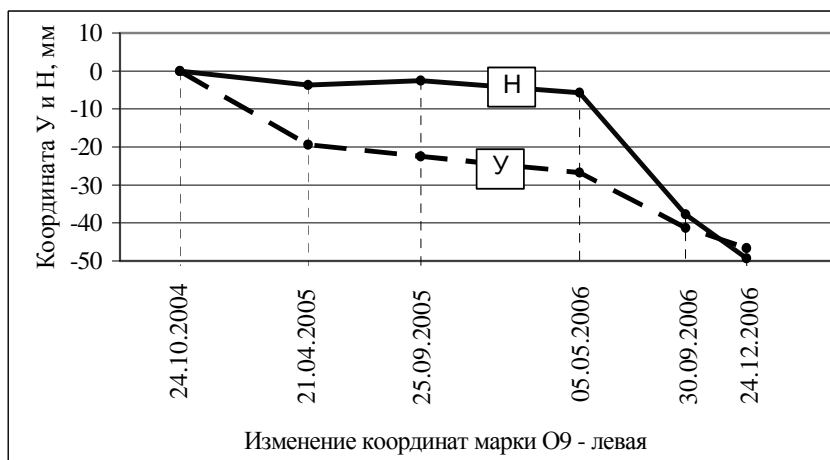
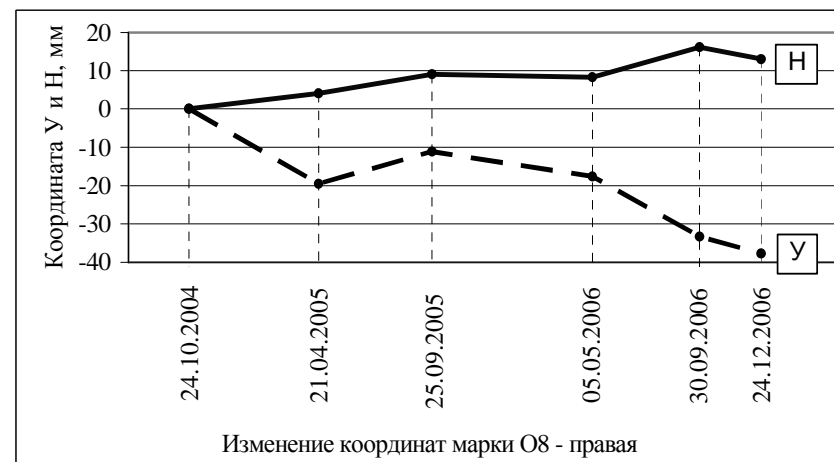
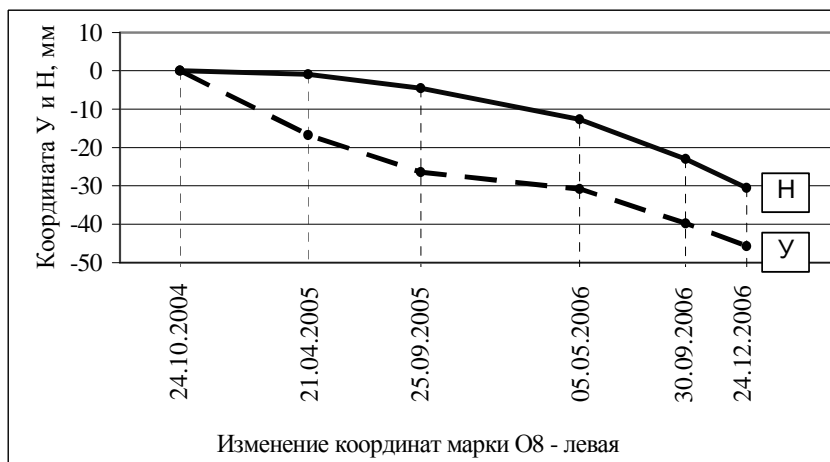
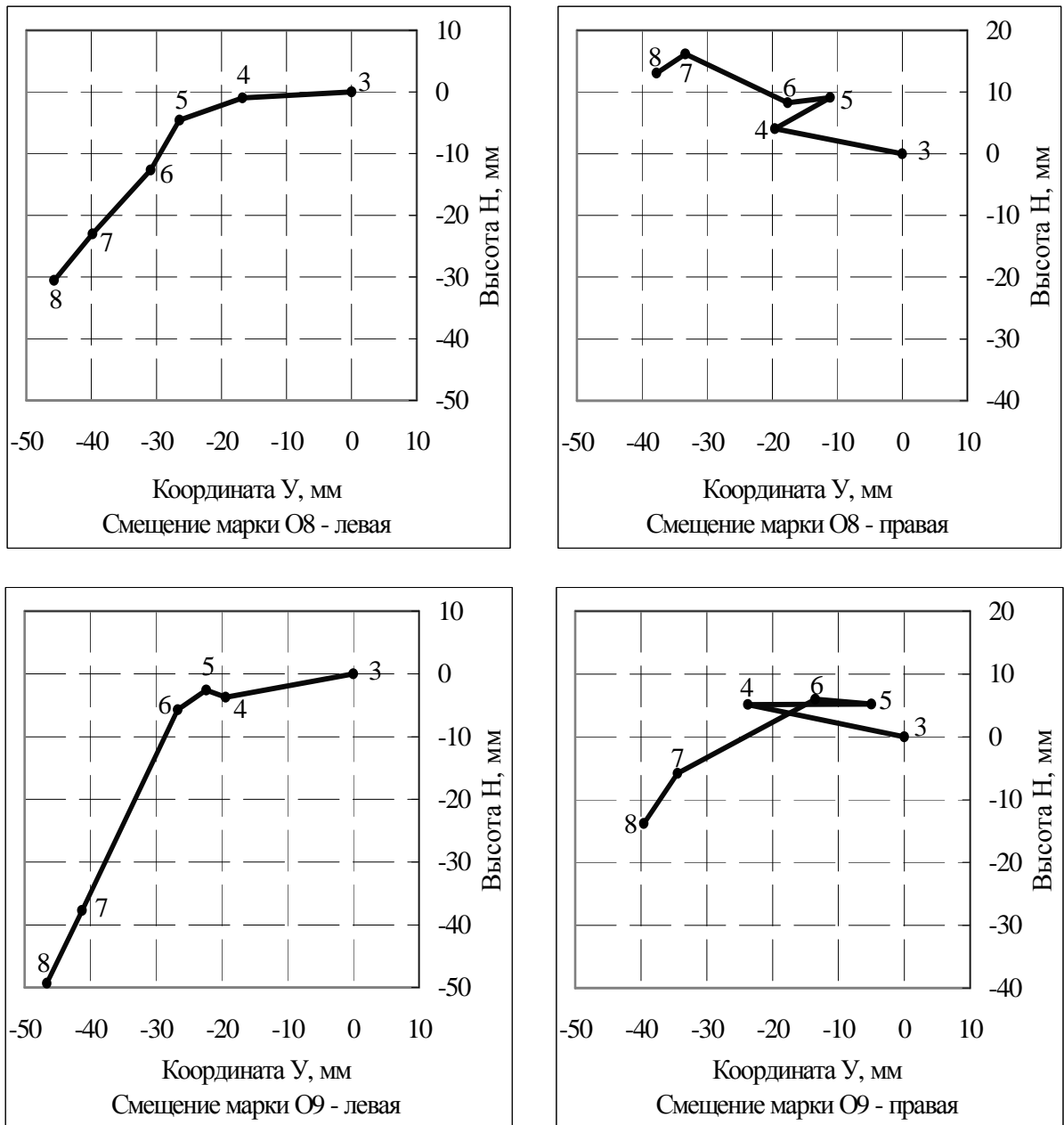


Рис. 4.3. Графики смещений и осадок опор №8 и №9 моста у н.п. Садовый Отрадненского района Краснодарского края



Мост у н.п. Садовый Отраденского района Краснодарского края

Цикл 3 - 24.10.2004; Цикл 4 - 21.04.2005; Цикл 5 - 25.09.2005;
 Цикл 6 - 05.05.2006; Цикл 7 - 30.09.2006; Цикл 8 - 24.12.2006

Рис. 4.4. Графики смещений и осадок опор №8 и №9 моста в плоскости, перпендикулярной оси моста.

4.2 Результаты определений прогибов балок

На рисунке 4.5 приведен пример вычисления прогибов балок с одной станции. В столбцы E и F скопированы отсчёты по горизонтальному и вертикальному кругам при наведении на начало, середину и конец каждой балки. Измерения выполнены при одном круге оптическим теодолитом ТНЕО-010 двухсекундной точности. Это были последние измерения данным прибором. Расстояния (графа G) измерялись нитяным дальномером. В графе H вычислены горизонтальные углы в радианах от начала до середины и от середины до конца балки. По основным формулам метода найдены для середины балки зенитные расстояния $z_{\text{выч}}$ (графа I), затем разности зенитных расстояний $z_{\text{изм}} - z_{\text{выч}}$ и прогибы Δh (графы J-L).

	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
10				С точки Т2. Левые внешние балки. 08.06.2007						
11	№балки		ГК	ВК	Расст.	Гор.угол	Zвыч	Разность	Zизм	Прогиб
12	слева		гр,мин,с	гр,мин,с	гориз.	альфа	рад	Z	рад	мм
13		начало	308,4904	88,1138		-0,02198				
14	1	середина	307,3330	87,5721	92,4		1,5348	-0,0003	1,5351	-30,2
15		конец	305,2616	87,3026		-0,03701				
16		начало	304,5004	87,2414		-0,05632				
17	2	середина	301,3628	87,0113	72,9		1,5184	-0,0004	1,5188	-25,7
18		конец	298,1613	86,3534		-0,05825				
19		начало	297,3137	86,3022		-0,09129				
20	3	середина	292,1748	86,0942	52,3		1,5033	-0,0005	1,5038	-28,5
21		конец	285,2222	85,4101		-0,12084				
22		начало	284,2500	85,3609		-0,18281				
23	4	середина	273,5633	84,5848	35,5		1,4834	0,0003	1,4832	9,4
24		конец	258,4626	84,2455		-0,26474				
25		начало	256,2233	84,2054		-0,33053				
26	5	середина	237,2616	84,2010	27,8		1,4711	-0,0009	1,4719	-24,0
27		конец	217,0738	84,5410		-0,35449				

Рис. 4.5. Вычисление прогибов 5-ти балок

В примере вычисления выполнены по зенитным расстояниям, хотя в формулах 2.36 и 2.37 используются углы наклона.

Пример взят из отчётов по наблюдениям моста, которые проводились по договору, заключённому с организацией, отвечающей за эксплуатацию мос-

та. Кроме других наблюдений измерения балок выполнялись 5 раз. Результаты измерения прогибов приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1. Ведомость определения прогибов балок

Номер балки	01.07.2006	23.08.2006	06.02.2007	31.03.2007	08.06.2007	Максимальное расхождение, мм
Левая сторона	Прогибы, мм					
1	-28	-32	-29	-31	-30	4
2	-31	-29	-30	-31	-26	5
3	-27	-25	-26	-27	-28	3
4	10	10	8	10	9	2
5	-25	-26	-25	-24	-24	2
Правая сторона	Прогибы, мм					
1	-32	-30	-36	-30	-33	6
2	-36	-36	-35	-34	-36	2
3	-13	-16	-12	-13	-11	5
4	-14	-17	-18	-16	-18	4
5	-40	-35	-37	-38	-36	5

Результаты довольно убедительные. При длине балки 20 метров и расстояниях визирования до 92 метра максимальные расхождения между 5-ю значениями прогибов составляют 6 мм. Для 3-х балок из 10-ти эти расхождения составляют только 2 мм. При этом не было ни одного случая повторных измерений.

Заметим, что на измеренные прогибы оказывает влияние проезжающий по мосту тяжёлый транспорт, который может дополнительно прогибать балку на несколько миллиметров. Хотя наведения на середину балки по возможности выполнялось, когда на балке не было тяжёлых машин, этот фактор может исказить измеренные прогибы.

Таким образом, проведенные определения прогибов 10-ти балок в 5-ти циклах измерений с одной станции показали хорошие результаты и возможность применения разработанного метода на практике.

4.3 Результаты съёмки нижнего пояса балок моста

На рисунке 4.6 приведены вычисления координат точек балки с двух станций первым способом - приближениями. В графы E и F копируются отчёты по горизонтальному и вертикальному кругам. Далее выполняются расчёты, подобные, описанным выше. В графах M и N вычисляются разности вычисленных и измеренных дирекционных углов и углов наклона. Целевой является ячейка N26 (для 1-й балки). Изменяемыми являются 12 ячеек (матрица T27:U32). Это 3 координаты начальной точки на балке (для 1-й строки таблицы), изгиб и прогиб середины балки, дирекционный угол и угол наклона линии балки и 5 горизонтальных расстояний от начальной точки до 5-ти других. Расстояние l_4 может быть и отрицательным. По этим данным вычисляются координаты остальных 5-ти точек. Затем по координатам обеих станций (на рисунке не приведены) и 6-ти точек (матрица O27:Q32) вычисляются новые уклоны и по ним новое значение в целевой ячейке до тех пор пока все уклоны не станут равными нулю.

Для 1-й балки выполнены вычисления 2-м способом - по формулам пространственной геометрии в п 3.5.

На рисунке 4.7 показаны горизонтальная и вертикальная проекции линии балок. Рисунки составлены по вычисленным координатам точек (рис. 4.6, матрица O27: Q64), отсортированным в порядке возрастания координаты X . Масштабы по осям Y и Z более чем в 10 раз крупнее по сравнению с масштабом по оси X . Кроме наглядности это обусловлено ещё и тем, что точность по оси X несколько ниже, чем по двум другим осям. Для каждой балки видно 6 точек наведений. Если бы точки на балках можно было пометить и наводить на них при измерениях, имели бы известные прямую угловую засечку и тригонометрическое нивелирование на 3 точки балки. Недоступность балок явилась побудительным мотивом разработки данной методики.

	В	С	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	
24	Номер	Точка	Точка	Отсчёт	Отсчёт	ГК,	БК,	Измер.	Вычисл.	Вычисл.	Вычисл.	Уклонен.	Уклонен.	X	У	Z	Обозначения		Подбираемые		
25	балки	стоянки	киспров	по ГК	по БК	рад	рад	дир угол	дир угол	угл.накл	расст	дир угл	угл.накл	м	м	м	подбир. элементов		элементы		
26												[vv]=	0,0000								
27	1	A	начало	52,4654	88,1302	0,9212	0,0311	2,8688	2,8688	0,0311	102,70	0,00000	0,00000	446,207	496,643	50,242	X1	α	446,207	0,0031	
28	1	A	середина	51,0948	87,5436	0,8930	0,0365	2,8405	2,8405	0,0365	93,38	0,00000	0,00000	455,921	496,664	50,453	Y1	β	496,643	9,715	
29	1	A	конец	49,1357	87,3007	0,8593	0,0436	2,8068	2,8068	0,0436	84,40	0,00000	0,00000	465,387	496,702	50,728	Z1	β	50,242	19,181	
30	1	B	начало	176,1811	86,5822	3,0771	0,0528	3,0815	3,0815	0,0528	92,34	0,00000	0,00000	445,867	496,642	50,233	Δv	β	-0,009	-0,339	
31	1	B	середина	175,5610	86,3210	3,0707	0,0605	3,0751	3,0751	0,0605	83,72	0,00000	0,00000	454,507	496,659	50,418	Δz	β	-0,0346	8,300	
32	1	B	конец	175,2407	85,5147	3,0613	0,0722	3,0657	3,0657	0,0722	73,97	0,00000	0,00000	464,288	496,699	50,700	v	β	0,0253	18,082	
33																					
34												[vv]=	0,0000								
35	2	A	начало	48,4935	87,2628	0,8522	0,0447	2,7997	2,7997	0,0447	82,81	0,00000	0,00000	467,090	496,731	50,746	X1	α	467,090	-0,0007	
36	2	A	середина	45,5405	87,0559	0,8011	0,0506	2,7487	2,7487	0,0506	72,46	0,00000	0,00000	478,169	496,713	50,716	Y1	β	496,731	11,079	
37	2	A	конец	42,0423	86,3647	0,7343	0,0591	2,6819	2,6819	0,0591	62,53	0,00000	0,00000	489,068	496,715	50,746	Z1	β	50,746	21,978	
38	2	B	начало	175,1306	85,4038	3,0581	0,0754	3,0625	3,0625	0,0754	71,39	0,00000	0,00000	466,878	496,731	50,746	Δv	β	-0,010	-0,212	
39	2	B	середина	174,3511	85,0529	3,0471	0,0857	3,0515	3,0515	0,0857	62,49	0,00000	0,00000	475,810	496,715	50,716	Δz	β	-0,0298	8,720	
40	2	B	конец	173,2209	83,5451	3,0259	0,1062	3,0302	3,0302	0,1062	50,61	0,00000	0,00000	487,744	496,716	50,746	v	β	0,0000	20,654	
41																					
42												[vv]=	0,0000								
43	3	A	начало	41,3107	86,3310	0,7246	0,0602	2,6722	2,6722	0,0602	61,29	0,00000	0,00000	490,445	496,695	50,737	X1	α	490,445	0,0008	
44	3	A	середина	36,3018	86,1333	0,6371	0,0659	2,5847	2,5847	0,0659	52,47	0,00000	0,00000	500,564	496,704	50,507	Y1	β	496,695	10,119	
45	3	A	конец	29,1940	85,4430	0,5119	0,0743	2,4594	2,4594	0,0743	44,00	0,00000	0,00000	510,951	496,712	50,322	Z1	β	50,737	20,506	
46	3	B	начало	173,0219	83,3519	3,0201	0,1119	3,0245	3,0245	0,1119	47,95	0,00000	0,00000	490,423	496,695	50,738	Δv	β	0,000	-0,022	
47	3	B	середина	171,0814	82,1043	2,9869	0,1365	2,9913	2,9913	0,1365	37,48	0,00000	0,00000	500,986	496,704	50,498	Δz	β	-0,0256	10,541	
48	3	B	конец	168,2355	80,0510	2,9391	0,1730	2,9435	2,9435	0,1730	28,55	0,00000	0,00000	510,050	496,711	50,340	v	β	-0,0203	19,605	
49																					
50												[vv]=	0,0000								
51	4	A	начало	28,0859	85,3912	0,4913	0,0759	2,4388	2,4388	0,0759	42,90	0,00000	0,00000	512,369	496,696	50,306	X1	α	512,369	-0,0011	
52	4	A	середина	18,0227	85,0343	0,3149	0,0862	2,2624	2,2624	0,0862	35,97	0,00000	0,00000	522,162	496,676	50,153	Y1	β	496,696	9,793	
53	4	A	конец	2,5132	84,3024	0,0499	0,0959	1,9974	1,9974	0,0959	30,43	0,00000	0,00000	532,511	496,674	49,972	Z1	β	50,306	20,142	
54	4	B	начало	167,2840	79,2105	2,9230	0,1859	2,9274	2,9274	0,1859	26,37	0,00000	0,00000	512,277	496,697	50,308	Δv	β	-0,010	-0,093	
55	4	B	середина	159,5244	73,4323	2,7904	0,2841	2,7948	2,7948	0,2841	16,43	0,00000	0,00000	522,594	496,676	50,146	Δz	β	0,0096	10,225	
56	4	B	конец	135,3347	59,5927	2,3660	0,5238	2,3704	2,3704	0,5238	8,01	0,00000	0,00000	532,300	496,675	49,976	v	β	-0,0166	19,930	
57																					
58												[vv]=	0,0000								
59	5	A	начало	0,4336	84,2644	0,0127	0,0969	1,9602	1,9602	0,0969	29,95	0,00000	0,00000	533,734	496,676	49,958	X1	α	533,734	0,0006	
60	5	A	середина	341,1939	84,2631	5,9573	0,0970	7,9048	1,6216	0,0970	27,74	0,00000	0,00000	543,695	496,670	49,744	Y1	β	496,676	9,961	
61	5	A	конец	321,4954	84,5803	5,6170	0,0878	7,5646	1,2814	0,0878	28,92	0,00000	0,00000	553,359	496,689	49,592	Z1	β	49,958	19,624	
62	5	B	начало	126,3010	56,3233	2,2079	0,5839	2,2123	2,2123	0,5839	6,97	0,00000	0,00000	533,873	496,676	49,955	Δv	β	-0,013	0,138	
63	5	B	середина	43,2906	61,2626	0,7590	0,4985	0,7633	0,7633	0,4985	8,07	0,00000	0,00000	543,872	496,670	49,741	Δz	β	-0,0279	10,138	
64	5	B	конец	19,0929	75,5344	0,3344	0,2462	0,3388	0,3388	0,2462	16,84	0,00000	0,00000	553,928	496,689	49,582	v	β	-0,0186	20,193	

Рис. 4.6. Обработка измерений при съёмке нижнего пояса балок моста

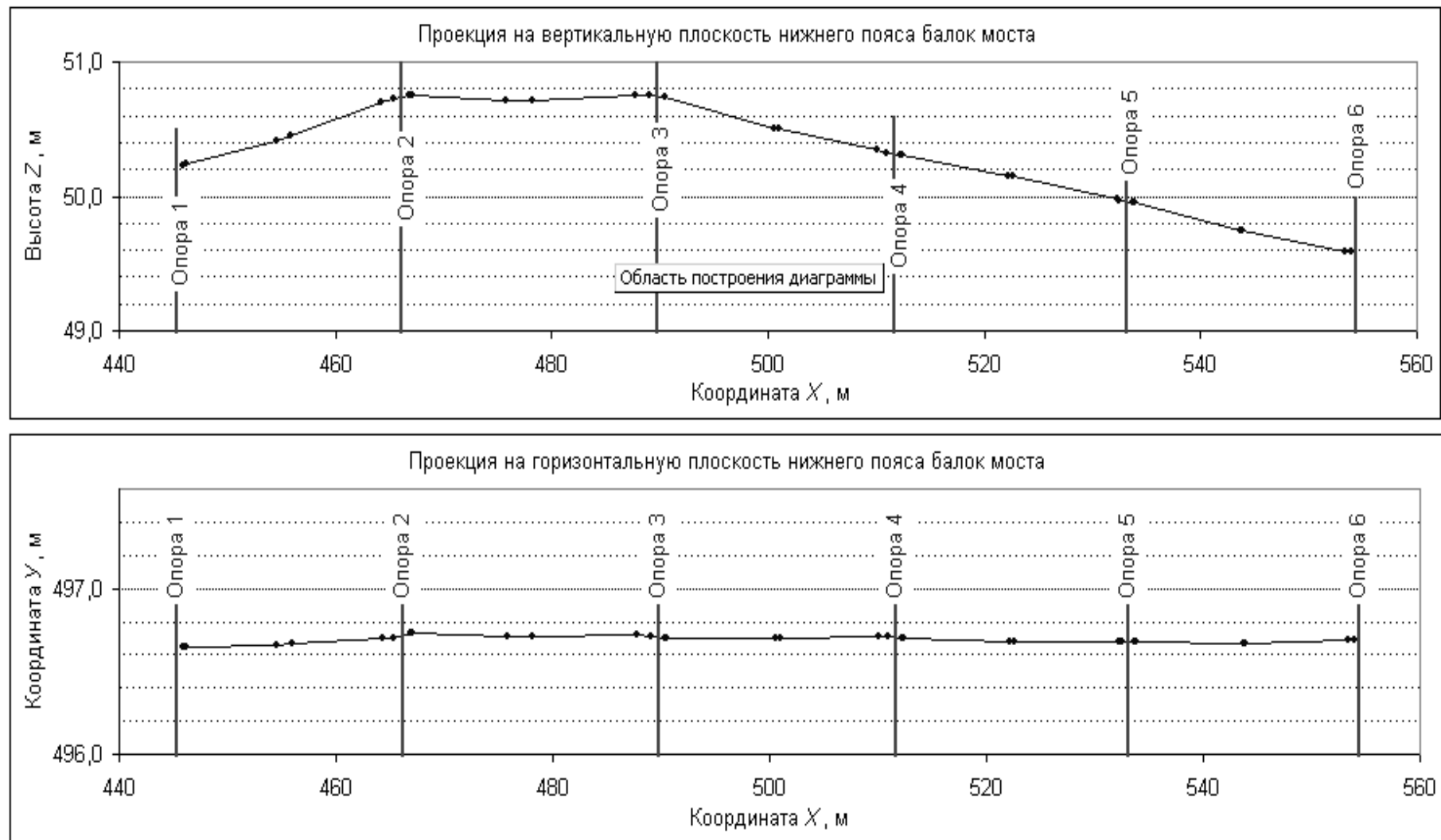


Рис. 4.7. Результаты съёмки нижнего пояса балок моста

Таким образом, испытания методики съёмки линии балок моста показали хорошие результаты. Данная методика позволяет нарисовать две проекции снимаемой линии: на вертикальную и горизонтальную плоскости. Хотя два разработанных способа обработки измерений достаточно сложны, они дают одинаковые результаты. Это свидетельствует не только о правильности выведенных формул, но и о правомочности применения того способа обработки, который лучше подходит. Применение первого или второго способа вычислений зависит от наличия избыточных измерений. При использовании компьютера сложность обработки не является препятствием для применения методики на практике.

4.4 Анализ вертикальных смещений опор моста в зависимости от уровня воды в реке

Для этого анализа были использованы наблюдения мостов по программе, изложенной в п. 2.1. Методика измерений на мостах, особенно для высот марок, оказалась настолько точна, что удалось установить изменения высот марок от уровня воды в реке.

Для анализа были использованы измерения в двух циклах 2005 года: весеннем - в мае и осеннем - в октябре. В весеннем цикле уровень воды в реках был заметно выше по сравнению с уровнем воды в осеннем цикле.

При сравнении в обоих циклах высот марок, нанесённых на ригелях опор моста, было установлено, что для большинства мостов высоты марок в осеннем цикле по сравнению с высотами в весеннем цикле для опор, находящихся в воде, увеличились. В среднем подъём опор составил 1-3 мм на 1 метр уменьшения уровня воды в реке.

Результаты исследований вертикальных смещений представлены в таблице 4.2. В графе 3 таблицы приведены номера опор, которые в обоих циклах наблюдений находились в воде. Для этих опор вычислены разности (графа 4)

средних высот марок в осеннем и весеннем циклах, при условии, что средние высоты 4-х марок на обеих береговых опорах в обоих циклах одинаковы. Знак плюс (для 21 моста из 25) в разностях означает, что эти опоры в среднем поднялись в осеннем цикле на указанную величину. Максимальная разность в 6,8 мм имеет место для моста под № 15 таблицы. Меньшие разности имеют величины 4,7 мм для моста под № 18 и 4,0 мм для моста под № 14.

Точность определения высот марок лежит в диапазоне 1-3 мм. Отсюда для средних высот марок получим точность порядка 1 мм. Поэтому достаточно достоверными можно считать только те разности, которые больше 1 мм по абсолютной величине. Разности в 1 мм и менее имеют место в основном для тех мостов, где небольшие разности уровней воды для обоих циклов.

В графе 6 приведены коэффициенты, вычисленные по формуле

$$k = \frac{y}{x}, \quad (4.1)$$

где y – разность средних высот марок (графа 4); x – разность уровней воды (графа 5).

Для наглядности результаты измерений представлены графически (рис. 4.8). Каждая точка на рисунке нанесена по координатам x и y . Всего 25 точек по числу мостов в таблице. На рисунке отчётливо видна корреляция между разностями высот марок и разностями уровней воды в реке. Наклонной штриховой линией показан линейный тренд этой зависимости

$$y = a \cdot x + b. \quad (4.2)$$

Коэффициент корреляции r между y и x составляет 0,69. Коэффициент a линейной регрессии y на x равен минус 0,00188. Это означает, что изменение величины x на 1 метр приводит к изменению y на величину минус 0,00188 м. При этом линия тренда проходит довольно близко к началу координат и отсекает по оси y отрезок длиной 0,5 мм ($b = -0,5$). Логичней принять $b = 0$ (сплошная линия). В этом случае наклон несколько меньше и составляет минус 0,00154.

Оценим достоверность коэффициента корреляции, используя критерий Фишера [78, с. 38].

Для величины z при $r = 0,69$ будем иметь

$$z = \frac{1}{2}(\ln(1+r) - \ln(1-r)) = 0,85. \quad (4.3)$$

Для средней квадратической ошибки m_z функции z при $n = 25$ получим

$$m_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}} = 0,21. \quad (4.4)$$

Возьмём, например, вероятность $p = 0,8$. Для неё коэффициент Стьюдента равен $t_\beta = 1,283$. Отсюда доверительный интервал для величины z

$$z - t_\beta \cdot m_z < z < z + t_\beta \cdot m_z \quad (4.5)$$

будет равен

$$0,58 < z < 1,12. \quad (4.6)$$

Из формулы (4.6) с учётом (4.3) получим доверительный интервал для коэффициента корреляции

$$0,52 < r < 0,81. \quad (4.7)$$

Так как нижняя граница в (4.7) больше 0,5 можно утверждать, что с вероятностью не менее 0,8 прямолинейная корреляционная связь между значениями x и y установлена.

Оценим также точность коэффициента регрессии a с y на x по [78, с 39]:

$$m_a = \frac{m_y}{m_x} \sqrt{\frac{1-r^2}{n-3}} = 0,00043, \text{ при } m_x = 0,65 \text{ м, } m_y = 0,0018 \text{ м.} \quad (4.8)$$

Отсюда доверительный интервал при $p = 0,8$ лежит в диапазоне

$$-0,0021 < a < -0,0010, \quad (4.9)$$

который означает, что осадки опор при увеличении уровня воды на 1 метр составляют от 1,0 до 2,1 мм с вероятностью 0,8.

Полученный интервал довольно велик. Его ширина обусловлена не только и не столько ошибками измерений, сколько тем, что каждый мост имеет свой коэффициент a .

Этот коэффициент, равный коэффициенту k в (4.1), зависит, в основном, от двух параметров: от модуля упругости грунта дна реки и глубины заложения фундамента опоры. Чем меньше жёсткость грунта под основанием фундамента опоры и чем ближе основание находится к дну реки, тем больше коэффициент k . Оба параметра представляют интерес при эксплуатации мостов и принятия решения о реконструкции или ремонте моста. Поэтому возможность подобного исследования полезно использовать одновременно с наблюдениями за стабильностью элементов автомобильных мостов. Отметим также, что точность нахождения коэффициента k тем выше, чем больше разность уровней воды. Циклы измерений можно преднамеренно выполнять в периоды меженных и паводковых вод в реке.

Глубина заложения фундаментов опор важна для прогнозирования осадок и планирования ремонта. Она не всегда известна. Её измерения даже современными приборами не всегда достоверны. Методом, здесь изложенным, можно найти одновременно с наблюдениями осадок, смещений и деформаций элементов моста для контроля и глубину заложения. Сделав два цикла измерений в периоды максимальной разности уровня воды, и взяв пробу грунта дна реки, вычисляют нужные коэффициенты, по которым можно найти глубину заложения фундамента.

Заметим, что с целью объективности и чистоты результатов проведенного исследования в обработку были включены результаты измерений на всех без исключения 25 мостах и на всех опорах. Подобные измерения выполнялись и в 2006 году и позже. Однако уровни воды в реках для обоих циклов измерений были почти одинаковы, поэтому подобный анализ для измерений, выполненных в 2006 году, не проводился.

Следует отметить, что представленные результаты можно интерпретировать совсем иначе. Вычисленные смещения по высоте (графа 4 таблицы) могут являться следствием не подъёма опор, находящихся в воде, а осадками первой и последней опор. С целью оценки возможности такого варианта были вычислены разности высот и для опор, не находящихся в воде. Для этих

разностей корреляции с разностями уровней воды практически нет. Следовательно, этот вариант гораздо менее вероятен. Кроме того, его трудно объяснить теоретически.

Таким образом, на основании анализа наблюдений в мае и октябре 2005 года в Краснодарском крае 25 автомобильных мостов, установлено уменьшение высот опор на 1-2 мм при увеличении уровня воды в реке на 1 метр. Вертикальные смещения опор вызваны упругими деформациями грунта, на который опираются фундаменты опор моста.

Таблица 4.2. Результаты вертикальных смещений мостовых опор

№№	Название реки и местоположение моста	Номера опор в воде	Смещение опор по высоте y , мм	Разность уровней воды x , м	Коэффициент $k \cdot 10^3$
1	2	3	4	5	6
1	Пшиш у н.п. Тверская Апшеронского р-на	4	+2,5	-1,5	-1,7
2	Пшеха у н.п. Апшеронск	8, 9, 10	+0,5	-0,7	-0,7
3	Пшиш у н.п. Хадыженск Апшеронского р-на	2	+3,0	-0,5	-6,0
4	Пшеха у н.п. Ширванская Апшеронского р-на	4	+0,5	-0,9	-0,6
5	Пшиш у н.п. Гурийская Белореченского р-на	3	+1,0	-0,9	-1,1
6	Белая у н.п. Бжедухабль Белореченского р-на	3, 4, 5	-1,0	-0,7	+1,4
7	Белая у н.п. Белореченск	3, 4	+1,0	-1,1	-0,9
8	Пшеха у н.п. Пшехская Белореченского р-на	3, 4, 5	+2,3	-1,1	-2,1
9	Пшиш у н.п. Октябрьская Белореченского р-на	2	+0,5	-1,6	-0,3
10	Псекупс у н.п. Саратовская (Горячий Ключ)	3, 4	0	-0,9	0
11	Кубань у н.п. Кропоткин Гулькевичского р-на	3, 4	+2,2	-1,5	-1,5
12	Кубань у н.п. Кавказская Гулькевичского р-на	2, 3	+2,0	-1,4	-1,4
13	Кубань у н.п. Прочноокопский Новокубанского р-на	3 - 8	-1,4	-0,8	+1,8
14	Протока у н.п. Славянск на Кубани	3	+4,0	-2,9	-1,4
15	Кубань у н.п. Троицкая Славянского р-на	2, 3	+6,8	-2,6	-2,6
16	Кубань у н.п. Тбилисская	2, 3, 4	+2,3	-1,6	-1,4
17	Кубань на юге г. Темрюк	2, 3	+2,8	-0,9	-3,1
18	Кубань у н.п. Варениковская Темрюкского р-на	4, 5, 6	+4,7	-1,8	-2,6

19	Казачий Ерик у н.п. Стрелка Темрюкского р-на	2	+1,5	-0,6	-2,5
20	Кубань на севере г. Темрюк	2 – 5	+1,9	-0,6	-3,2
21	Пшиш у н.п. Шаумян Туапсинского р-на	3 – 5	+0,3	-0,5	-0,6
22	Пшиш у н.п. Гойтх Туапсинского р-на	2, 3	0,0	-0,3	0,0
23	Кубань у н.п.Ладожская Усть-Лабинского р-на	2 – 5	+3,2	-1,7	-1,9
24	Лаба у н.п. Некрасовская Усть-Лабинского р-на	2, 3	+1,2	-0,9	-1,3
25	Кубань у н.п. Заречный Усть-Лабинского р-на	4,5	+1,5	-2,0	-0,8

4.5 Выводы по главе 4

Приведен пример обработки измерений по разработанной методике определения координат марок без измерения расстояний и использования реперов, который показал хорошие результаты и позволил своевременно выявить осадки опор на двух мостах.

Приведен пример вычисления прогибов балок с одной станции. Результаты довольно убедительные. При длине балки 20 метров и расстояниях визирувания до 92 метра максимальные расхождения между 5-ю значениями прогибов составляют 6 мм. Для 3-х балок из 10-ти эти расхождения составляют только 2 мм.

Показаны результаты испытания методики съёмки линии балок моста. Данная методика позволяет нарисовать две проекции снимаемой линии: на вертикальную и горизонтальную плоскости. Хотя два разработанных способа (итерациями и по формулам пространственной геометрии) обработки измерений достаточно сложны, они дают одинаковые результаты. Это свидетельствует не только о правильности выведенных формул, но и о правомочности применения того способа обработки, который лучше подходит в конкретном случае.

На основании анализа наблюдений в мае и октябре 2005 года в Краснодарском крае 25 автомобильных мостов, установлено уменьшение высот

опор на 1-2 мм при увеличении уровня воды в реке на 1 метр. Вертикальные смещения опор вызваны упругими деформациями грунта, на который опираются фундаменты опор моста.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленная диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук является законченной научно-квалификационной работой, в которой содержится решение задачи повышения точности определений деформаций элементов автомобильных мостов.

Основные научные и практические результаты диссертации заключаются в следующем:

- разработана и испытана новая методика определения деформаций деталей мостов. Использование данной методики позволяет приводить различные по времени циклы измерений к единой системе координат без использования опорных реперов и без закрепления станций наблюдений на местности. Исключение реперов из схемы наблюдений позволяет повысить точность измерений за счет исключения промежуточного этапа – определения координат станций наблюдений от реперов. Кроме этого использование методики позволяет исключить основные погрешности: центрирования, редукции визирной цели, измерения высоты прибора и высоты визирования, приводящие к значительной потере точности;

- разработаны и испытаны два метода решения задачи определения прогибов и изгибов недоступных балок моста. Использование первого метода позволяет определять с одной станции непрямолинейность балок моста в вертикальной плоскости без измерения расстояний. Использование второго метода позволяет определять с двух станций обе составляющие непрямолинейности балки: в вертикальной и горизонтальной плоскостях;

- разработан алгоритм и составлены компьютерные программы оценки точности предлагаемых методов измерений на основе методики численного дифференцирования, снимающие проблему нахождения в общем виде большого количества частных производных функции неизвестных по измеренным аргументам;

- разработана и испытана методика исполнительной съёмки линии нижнего пояса недоступных балок моста с возможностью построения двух

продольных профилей линии: в горизонтальной и вертикальной плоскостях. Достоинством данной методики является то, что визирование осуществляется на произвольно выбранные, заранее не закрепленные точки на нижней линии балок моста. Съёмка осуществляется путём измерения горизонтальных и вертикальных углов на точки балки с двух станций, расстояния не измеряются, тем самым исключаются ошибки измерения расстояний безотражательным способом при острых углах визирования. Использование методики также позволяет автоматизировать и значительно сократить объём полевых работ, все измерения занимают несколько минут;

– выявлены вертикальные смещения опор на 25 мостах в зависимости от уровня воды в реке. Методика измерений на мостах, описанная в диссертации, оказалась достаточно точной для установления зависимости изменения высот марок от уровня воды в реке.

Основное содержание диссертационной работы опубликовано в следующих статьях:

1. Желтко А.Ч., Желтко С.Ч., Заречный В.С. Исследование пространственной линейной засечки. Деп. в ОНТИ ЦНИИГАИК 19.06.96 № 609 - гд 96. Опубликовано в БУ ВИНТИ "Депонированные научные работы", 1996, №8 /296/. С.48.

2. Желтко А.Ч., Желтко С.Ч. Определение прогибов балок автомобильных мостов // МГУ им. М.В.Ломоносова, Южный федеральный университет. Труды участников Международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова. 2008. С. 179-182.

3. Желтко Ч.Н., Желтко А.Ч. О вертикальных смещениях опор моста при изменении уровня воды в реке // Геодезия и картография. 2008. № 11. С. 12-13.

4. Желтко Ч.Н., Желтко А.Ч. Измерение прогибов недоступных балок автомобильных мостов // Инженерная геодезия. Сборник научных трудов. Киев. Выпуск 54. 2008. С. 67-70.

5. Желтко А.Ч., Желтко С.Ч. Мониторинг безопасности автомобильных мостов по упругим осадкам опор // Проблемы безопасности и чрезвычайных ситуаций. 2009. № 1. С. 23-26.
6. Желтко А.Ч., Желтко С.Ч. Об определении прогибов балок автомобильных мостов // Геодезия и картография. 2009. № 1. С. 23-24.
7. Желтко А.Ч. Анализ пространственной обратной засечки по двум исходным пунктам. // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. 2013. № 2. С.43-48.
8. Маркузе Ю.И., Желтко А.Ч. Способ исполнительной съемки нижнего пояса балок автомобильного моста. // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. 2013. № 3. Стр.20-25.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азаров Б.Ф. Современные методы геодезических наблюдений за деформациями инженерных сооружений // Ползуновский вестник. 2011. №1. С. 19–29.
2. Алфредо А.А., Маркузе Ю.И., Власенко Е.П. Анализ плановых деформаций инженерных сооружений и земной поверхности. // Геодезия и картография. 2007. № 3. С. 28–32.
3. Андреев Ю.П. К анализу вертикальных смещений реперов // Геодезия и картография. 1992. №5. С. 11–15.
4. Баркан Д.Д. Динамика оснований и фундаментов. – М.: Стройвоенмориздат, 1948. – 409 с.
5. Бедлевич Л.Ф., Заречный В.С. Определение осадок фундаментов Черкасской ТЭЦ в период эксплуатации // Сборник "Основания и фундаменты". Выпуск 18. – Киев: Будивельник, 1985. С. 8–11.
6. Беспалов Ю.И., Мирошниченко С.Г. Исследование точности измерения превышений электронными тахеометрами // Геодезия и картография. 2009. №3. С. 12–13.
7. Большаков В.Д., Гайдаев П.А. Теория математической обработки геодезических измерений. – М.: Недра, 1977. – 367 с.
8. Брайт П.И. Геодезические методы измерения деформаций оснований и сооружений. – М.: Недра, 1965. – 297 с.
9. Брайт П.И. Геодезические методы измерения смещений на оползнях. – М.: Недра, 1965. – 116 с.
10. Бугакова Т.Ю., Вовк И.Г. Математическое моделирование для геодезического контроля состояния инженерных сооружений // Геодезия и картография. 2003. № 8. С. 39–44.

11. Буденков Н.А., Нехорошков П.А. Способ контроля за устойчивостью реперов // Геодезия и картография. 2000. № 4. С. 28–30.
12. Вайнаукас В.В., Жиляев А.П. Автоматизированная фотограмметрическая система для исследования деформаций инженерных деформаций // Геодезия и картография. 1992. № 1. С. 36–38.
13. Васильев Е.А., Панкрушин В.К. Обзор и анализ методологических положений способов определения и прогнозирования движений деформаций по геодезическим наблюдениям // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. 1987. № 6. С. 45–53.
14. Визиров Ю.В. Наклонное проектирование при определении крена высокого сооружения // Геодезия и картография. 2006. № 3. С. 15–19.
15. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 318 с.
16. Гайрабеков И.Г., Сианисян С.С., Абрамова М.Е. Учёт влияния рефракции на геодинимических полигонах // Геодезия и картография. 1992. № 9. С. 24–26.
17. Галашев Ю.В., Ревенко В.В. Влияние масштабного фактора на осесимметричное деформированное состояние песчаного основания // Исследование и расчёт оснований и фундаментов при действии статических и динамических нагрузок. Межвузовский сборник. – Новочеркасск: НПИ, 1988. С. 23–28.
18. Ганьшин В.Н., Стороженко А.Ф., Ильин А.Г. Измерение вертикальных смещений сооружений и анализ устойчивости реперов. – М.: Недра, 1981. – 215 с.
19. Ганьшин В.Н., Стороженко А.Ф. Методы оценки устойчивости реперов // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. 1973. № 5. С. 3-10.

20. Герасимов В.А., Лобазов В.Я., Резник Б.Е. Концепция геодезического мониторинга деформационных процессов в условиях Заполярья // Геопрофи. 2010. № 1. С. 17–21.
21. Гордеевцев А.В., Мозжухин О.А. К учёту рефракции в нивелировании // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. 2005. Вып. 1. С. 34–38.
22. ГОСТ 24846-81. Грунты. Методы измерения деформаций оснований зданий и сооружений. – М.: Издательство стандартов, 1981. – 26 с.
23. Гуляев Ю.П. Анализ подходов к обоснованию точности геодезических наблюдений за деформационными процессами // Геодезия и картография. 2007. № 8. С. 11–16.
24. Гуляев Ю.П. О методологии геодезического мониторинга природно-техногенных систем // Геодезия и картография. 2006. № 3. С. 19–24.
25. Гуляев Ю.П. Прогнозирование деформаций инженерных сооружений по геодезическим данным на основе теории динамических систем // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. 1981. № 5. С. 64–69.
26. Дьяков Б.Н. Анализ устойчивости реперов свободной нивелирной сети // Геодезия и картография. 1992. № 4. С. 15–17.
27. Жарников В.Б., Жуков Б.Н. О классах геометрического нивелирования для контроля деформаций // Геодезия и картография. 1990. № 9. С. 22–26.
28. Желтко А.Ч., Желтко С.Ч., Заречный В.С. Исследование пространственной линейной засечки. Деп. в ОНТИ ЦНИИГАИК 19.06.96 № 609 - гд 96. Опубликовано в БУ ВИНТИ "Депонированные научные работы", 1996, № 8 /296/. С. 48.
29. Желтко А.Ч., Желтко С.Ч. Определение прогибов балок автомобильных мостов // МГУ им. М.В.Ломоносова, Южный федеральный университет. Труды участников Международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова. 2008. С. 179–182.

30. Желтко А.Ч., Желтко С.Ч. Мониторинг безопасности автомобильных мостов по упругим осадкам опор // Проблемы безопасности и чрезвычайных ситуаций. 2009. № 1. С. 23–26.
31. Желтко А.Ч., Желтко С.Ч. Об определении прогибов балок автомобильных мостов // Геодезия и картография. 2009. № 1. С. 23–24.
32. Желтко А.Ч. Анализ пространственной обратной засечки по двум исходным пунктам. // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2013. № 2. Стр. 43–48.
33. Желтко С.Ч., Заречный В.С. Об измерениях при определении осадок опор моста через р. Кубань // Актуальные проблемы дорожно-транспортного комплекса России. Материалы Всероссийской НТК. – Краснодар: технический ун-т КубГТУ, 1999. С. 46–47.
34. Желтко С.Ч. Об определении осадок сооружений способом геометрического нивелирования. Кубан. гос. технол. ун-т. – Краснодар, 2000. – 7 с. Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 10.10.2000, № 726-гд 2000 Деп.
35. Желтко Ч.Н. Значимость и весомость измерений в методе наименьших квадратов // Геодезия и фотограмметрия. – Ростов–на–дону: Рост. инж.–строит. ин–т, 1990. С. 128–136.
36. Желтко Ч.Н., Лабутин В.О. Анализ пространственной угловой обратной засечки по двум точкам. Деп. в ВИНТИ 01.09.05, №1192-B2005 5 с.
37. Желтко Ч.Н., Желтко А.Ч. Измерение прогибов недоступных балок автомобильных мостов // Инженерная геодезия. Сборник научных трудов. – Киев. Выпуск 54. 2008. С. 67–70.
38. Желтко Ч.Н., Желтко А.Ч. О вертикальных смещениях опор моста при изменении уровня воды в реке // Геодезия и картография. 2008. № 11. С. 12–13.
39. Зайцев А.К., Марфенко С.В. Геодезические методы исследования деформаций сооружений. – М.: Недра, 1991. – 272 с.

40. Заречный В.С., Желтко С.Ч. Математическое моделирование прогнозирования осадок по компрессионным характеристикам / Материалы Всероссийской НТК. – Краснодар: Технический ун–т КубГТУ, 1999. С. 51.
41. Инструкция по проведению осмотров мостов и труб на автомобильных дорогах (ВСН 4-81) / Минавтодор РСФСР. – М.: Транспорт, 1981. – 32 с.
42. Ключин Е.Б., Михелев Д.Ш. Инженерная геодезия. Учебник. – М.: Недра, 1990. – 264 с.
43. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1970. – 720 с.
44. Куштин И.Ф. Геодезия. Учебно-практическое пособие. – М.: «Издательство ПРИОР», 2001. – 448 с.
45. Куштин И.Ф. Куштин В.И. Инженерная геодезия. Учебник. – Ростов–на–Дону: «Издательство ФЕНИКС», 2002. – 416 с.
46. Лобов М.И. К разработке автоматизированных систем измерения деформаций сооружения // Геодезия и картография. 1994. № 1. С. 19–21.
47. Левчук Г.П., Новак В.Е., Конусов В.Г. Прикладная геодезия: Основные методы и принципы инженерно-геодезических работ. Учебник для вузов. – М.: Недра, 1981. – 438 с.
48. Лысков Г.А., Куштин И.Ф., Самсонов В.А. Наблюдения за осадками инженерных сооружений по нестандартным рейкам // Геодезия и фотограмметрия. – Ростов–на–Дону: Рост. инж–строит. ин–т, 1991. С. 43–48.
49. Мазмишвили А.И. Способ наименьших квадратов – М.: Недра, 1968. – 438 с.
50. Маркузе Ю.И. Алгоритмы для уравнивания геодезических сетей на ЭВМ. – М.: Недра, 1989. – 248 с.
51. Маркузе Ю.М. Основы уравнивательных вычислений. Учебное пособие для вузов. – М.: Недра, 1990. – 240 с.

52. Маркузе Ю.И., Голубев В.В. Теория математической обработки геодезических измерений. Учебное пособие для вузов. – М.: Академический Проект Альма Матер, 2010. – 247 с.

53. Маркузе Ю.И. Эффективный алгоритм для анализа деформаций / Геодезия, 225 лет МИИГАиК. – М.: МИИГАиК, 1999. С. 306–317.

54. Маркузе Ю.И., Желтко А.Ч. Способ исполнительной съёмки нижнего пояса балок автомобильного моста // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъёмка. 2013. № 3. С. 20–25.

55. Мицкевич В.И. Об оценке точности при определении положения пункта из решения системы нелинейных уравнений // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъёмка. 1980. № 5. С. 21–25.

56. Мицкевич В.И., Ялтыхов В.В. Уравнивание и оценка точности геодезических засечек под различными критериями оптимальности решения // Геодезия и картография. 1994. №7. С. 14–16.

57. Мозжухин О.А. Определение поправок за счёт влияния рефракции в тригонометрическом нивелировании // Геодезия и картография. 1994. № 6. С. 16–17.

58. Нгуен Вьет Ха. Разработка методики определения деформаций плотин гидроэлектростанций по результатам спутниковых геодезических измерений во Вьетнаме: дис. на соискание уч. степ. к.т.н. (25.00.32) / Москва, 2010. – 122 с.

59. Нестерёнок В.Ф. О нормировании точности геометрического нивелирования для измерения деформаций // Геодезия и картография. 1992. № 3. С. 16–18.

60. Нестерёнок В.Ф. О расчёте температурных прогибов башен круглого сечения. // Геодезия и картография. 1993. № 10. С. 16–20.

61. Никитчин А.А. О совершенствовании методики анализа и интерпретации спутниковых геодезических измерений в системах мониторинга вантовых мостов // Геодезия и картография. 2009. № 4. С. 34–36.

62. Николаев С.А. Определение периода стабилизации осадок инженерных сооружений по данным геодезических наблюдений // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1978. № 4. С. 41–45.

63. Николаев С.А. Статистические исследования осадок инженерных сооружений. – М.: Недра, 1983. – 110 с.

64. Павлив П.В., Стащимин И.И. Об исключении влияния рефракции при нивелировании // Геодезия и картография. 1979. № 9. С. 23–25.

65. Пимшин Ю.И., Дегтярев А.М., Марусов А.А., Пимшина Т.М. О совершенствовании способа тригонометрического нивелирования // Геодезия и картография. 1994. № 7. С. 16–18.

66. Пискунов М.Е. Методика геодезических наблюдений за деформациями сооружений. – М.: Недра, 1980. – 248 с.

67. Подшивалов В.П., Али Салим (Сирия). Тригонометрическое нивелирование коротким лучом // Геодезия и картография. 1994. № 6. С. 18–19.

68. Попова Е.А. Разработка и исследование методов определения кренов плоских элементов сооружений: дис. на соискание уч. степ. к.т.н. (05.24.01) / Москва, 1998. –177 с.

69. Ратынский М.В. Ортогонализация взамен нормальных уравнений // Геодезия и картография. 1994. №11. С. 21–24.

70. Резник Б.Е. Непрерывные геодезические измерения деформаций строительных конструкций эксплуатируемых сооружений // Геопрофи. 2008. № 4. С. 4–10.

71. Резник Б.Е., Лобазов В.Я., Герасимов В.А., Эфендян П.С. Частотные измерения при мониторинге автомобильных мостов // Геопрофи. 2010. № 4. С. 11–15.

72. Россихин Ю.В., Битайнис А.Г. Осадки строящихся сооружений. – Рига: Зинатие, 1980. – 339 с.
73. Руководство по наблюдениям за деформациями оснований и фундаментов зданий и сооружений. – М.: Стройиздат, 1975. – 156 с.
74. Руководство по наблюдениям за осадками и смещениями инженерных сооружений фотограмметрическими методами: Утв. Гл. упр. геодезии и картографии при СМ СССР 23.03.78. – М.: Недра, 1979. – 120 с.
75. Руководство по натурным наблюдениям за деформациями гидротехнических сооружений и их оснований геодезическими методами. – М.: Энергия, 1980. – 200 с.
76. Самойленко А.Н., Мищенко Н.А. Исследование температурных деформаций каркаса промышленного здания // Геодезия и картография. 1993. № 9. С. 18–20.
77. Справочник геодезиста / Под. ред. В.Д. Большакова, Г.П. Левчука. – М.: Недра, 1966. – 984 с.
78. Справочник геодезиста: в 2-х книгах. Кн.1 / Под. ред. В.Д. Большакова, Г.П. Левчука. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1985. – 455 с.
79. Справочник геодезиста: в 2-х книгах. Кн.2 / Под. ред. В.Д. Большакова, Г.П. Левчука. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1985. – 440 с.
80. Строительные нормы и правила (СНиП):III – 2 – 75. Геодезические работы в строительстве. – М.: Стройиздат, 1976. – 24 с.
81. Тер–Степанян Г.И. Геодезические методы изучения динамики оползней. – М.: Недра, 1979. – 157 с.
82. Уставич Г.А.. Определение крена сооружений башенного типа GPS-приёмниками и тахеометрами // Геодезия и картография. 2003. № 9. С. 15–18.

83. Федосеев Ю.Е. Анализ способов исследования устойчивости реперов высотной основы. // Исследования по геодезии, аэрофотосъёмке и картографии. Межвузовский сборник, вып. 2. – М., 1977. С. 39–40.
84. Федосеев Ю.Е., Егорченкова Е.А. Стратегия и тактика интерпретации результатов геодезического мониторинга деформационных процессов // Наука и безопасность. 2011. № 2 (12), декабрь. С. 2–19.
85. Федосеев Ю.Е., Егорченкова Е.А. Требования к геодезической информации при мониторинге деформационных процессов мостовых сооружений // Инженерные изыскания. 2010. № 12. С. 50–57.
86. Хамид Фарамарз Пур. Разработка методов анализа деформации подземных сооружений: дис. на соискание уч. степ. к.т.н. (25.00.32) / Москва, 2007. – 84 с.
87. Хьюбер Дж. П. Робастность в статистике. М.: Мир, 1984. – 304 с.
88. Цюнько В.И. К вопросу прогнозирования осадок сооружений // Геодезия и фотограмметрия. – Ростов–на–Дону: Рост. инж.-строит. ин-т, 1990. С. 88–92.
89. Чан Куанг Хок. Разработка методики создания опорных сетей при строительстве мостов большой протяженности в горных районах: дис. на соискание уч. степ. к.т.н. (25.00.32) / Москва, 2012. –123 с.
90. Черников В.Ф. Создание высотной опорной сети для наблюдения за осадками промышленных сооружений // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. 1963. № 5. С. 89–94.
91. Шаршавицкий Л.В. Струнная оптико-электронная система измерения плановых деформаций // Геодезия и картография. 1989. № 7. С. 15–17.
92. Шаршавицкий Л.В. Автоматизированные системы измерения деформаций сооружений // Геодезия и картография. 1991. № 11. С. 21–23.
93. Щупель С.А. О точности задачи Ганзена // Геодезия и картография. 1992. № 2. С. 10–11.

94. Ямбаев Х.К. Высокоточные створные измерения. – М.: Недра, 1978. – 235 с.
95. Ярмоленко А.С. Минимаксное оценивание при известных предельных значениях ошибок измерений и исходных данных // Геодезия и картография. 1992. № 9–10. С. 16–20.
96. Costachel A. Einige neue Aspekte bei Präzisionsnivelements zur Bestimmung der Senkung von Bauten. – Vermessungstechnik, № 7, 1967. S. 250–257.
97. Deformation Measurements. – Budapest: Akademiai Kiado, 1983. – 899 p.
98. Heindl G., Reinhart E. Eine allgemeine Methode zur Berechnung von MINIMAX-Fehlern. T. 3. // Z. Vermessungsw. 1978. V. 103, N 4. S. 149–155.